

第十一章 一阶电路

重点掌握

零输入响应 零状态响应 全响应

稳态分量 暂态分量概念

§ 11-1 动态电路及其初始条件

§ 11-2 一阶电路的零输入响应

§ 11-3 一阶电路的零状态响应

§ 11-4 一阶电路的全响应

§ 11-5 二阶电路概述

11-1 动态电路及其初始条件

一、基本概念

1、电阻电路：电路中仅由电阻元件和电源元件构成。KCL、KVL方程和元件特性均为代数方程。因此描述电路的方程为代数方程。

动态元件：电容元件和电感元件的电压和电流的约束关系式通过导数或积分表达的，所以L和C称为动态元件。又称为储能元件。

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

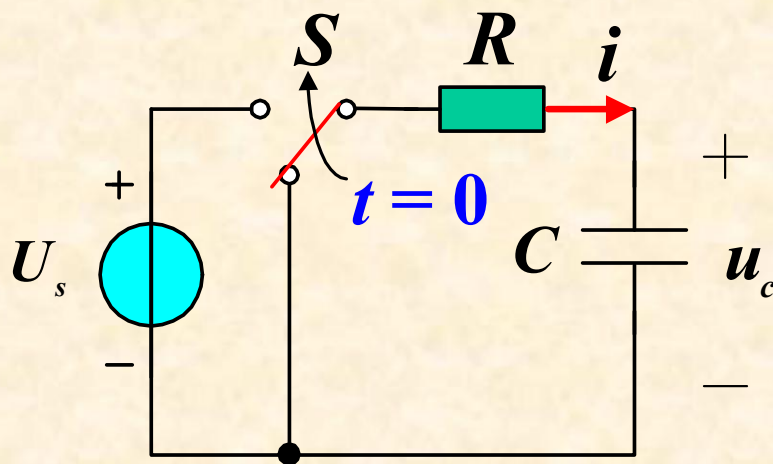
$$u_C = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C d\xi$$

2、动态电路：当电路中含**储能元件 $L(M)$ 、 C** 时，该电路称为动态电路。KCL、KVL方程以及元件的VCR建立的电路方程是以电流和电压为变量的微分方程或积分方程。

3、一阶RC电路和一阶RL电路：含有一个电容和一个电阻，或一个电感和一个电阻，当电路的无源元件都是线性和时不变时，电路方程将是一阶线性常微分方程，相应的电路称为一阶电阻电容电路（简称RC电路）或一阶电阻电感电路（简称RL电路）。

一阶动态电路：如果电路仅含一个动态元件，则可把动态元件以外的电路用戴维宁定理或诺顿定理变换为电压源和电阻的串联组合或电流源和电阻的并联组合，从而成为**RC电路或RL电路**，这种电路称为一阶动态电路。

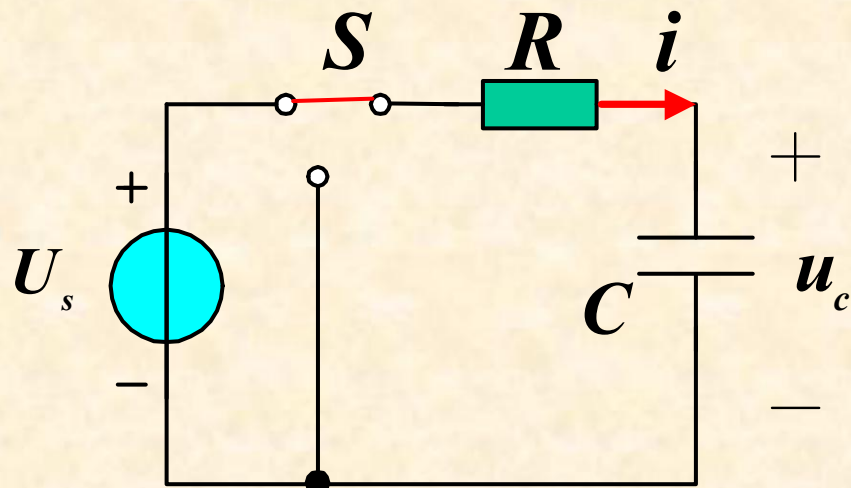
4、过渡过程



S未动作前

稳定状态(稳态)

$$i = 0, \quad u_C = 0$$

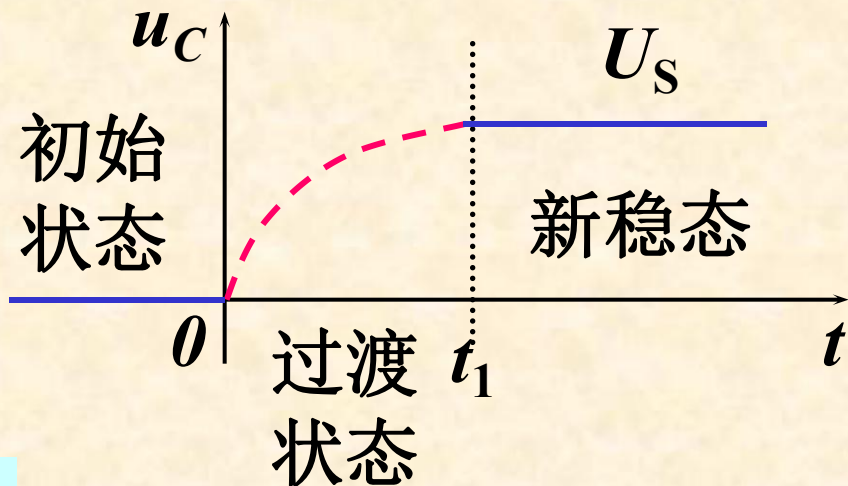
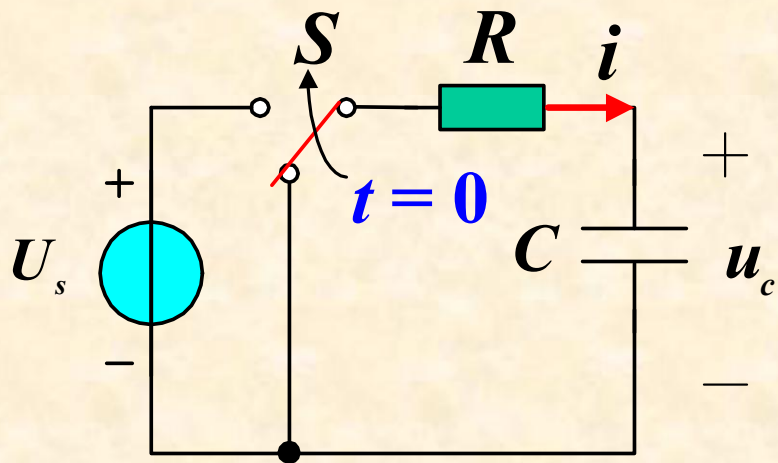


$t=0$, S动作

电路将进入一个新的稳定状态。

$$i = 0, \quad u_C = U_s$$

过渡过程：当电路的结构或元件的参数发生变化时（如电路中电源或无源元件的断开或接如，信号的突然注入等），可能使电路改变原来的工作状态，转变到另一个工作状态，这种转变往往需要经历一个过程，在工程上称为过渡过程。



二、过渡过程产生的原因

1. 电路中含有储量元件(内因)

能量不能跃变 $p = \frac{dw}{dt}$

2. 电路结构或电路参数发生变化(外因)

换路 { 支路的接入、断开；开路、短路等
参数变化

换路： 若换路在 $t=0$ 时刻进行。

换路前的最终时刻记为 $t=0_-$ 。

换路后的最初时刻记为 $t=0_+$ 。

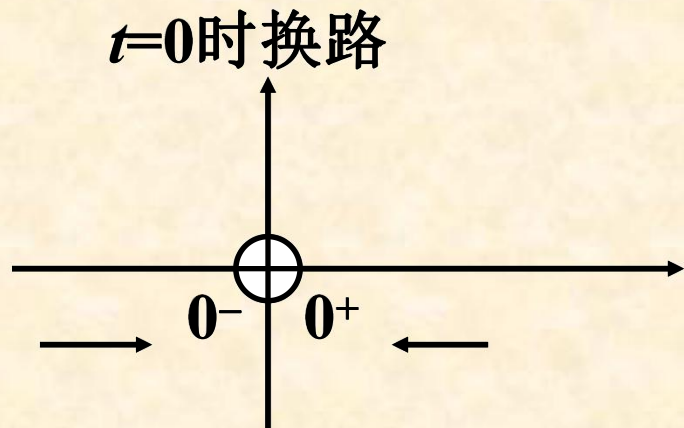
换路经历的时间为 0_- 到 0_+ 。

$$f(0_-) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} f(t)$$

$$f(0_+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t)$$

$t = t_0$ 换路：

$t = t_{0-}$ ： t_0 的前一瞬间； $t = t_{0+}$ ： t_0 的后一瞬间。

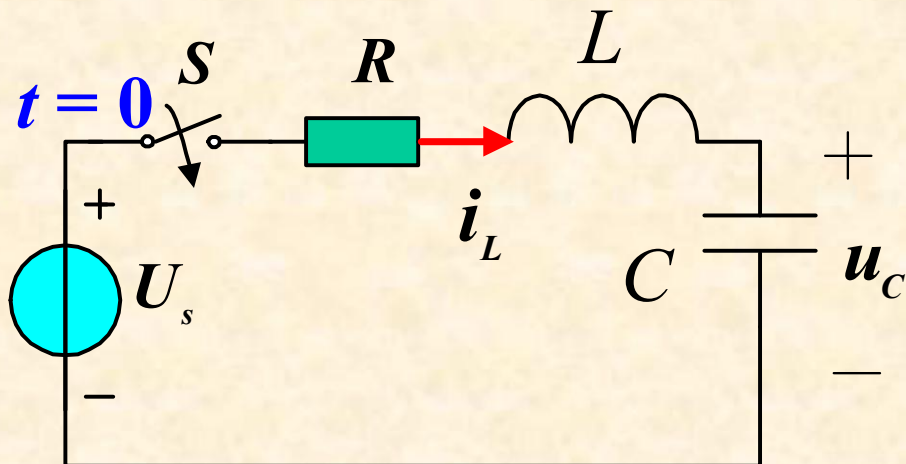


$$\begin{cases} t = 0_- & t = 0 \text{ 的前一瞬间} \\ t = 0 & \text{换路瞬间} \\ t = 0_+ & t = 0 \text{ 的后一瞬间} \end{cases}$$

三、分析动态电路的过渡过程的方法

{	经典法	时域分析法
	拉普拉斯变换法	频域分析法
	状态变量法	时域分析法
{	解析法	
	数值法	

经典法： 根据**KCL**、**KVL**和支路**VCR**建立描述电路的方程，建立的方程是以时间为自变量的线性常微分方程，然后求解常微分方程，从而得到电路所求变量（电压或电流）。这种方法称为**经典法**，它是在时域中进行的分析方法。



$$u_R + u_L + u_C = U_s$$

$$i_L = C \frac{du_C}{dt}$$

$$u_R = Ri_L = RC \frac{du_C}{dt}$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s$$

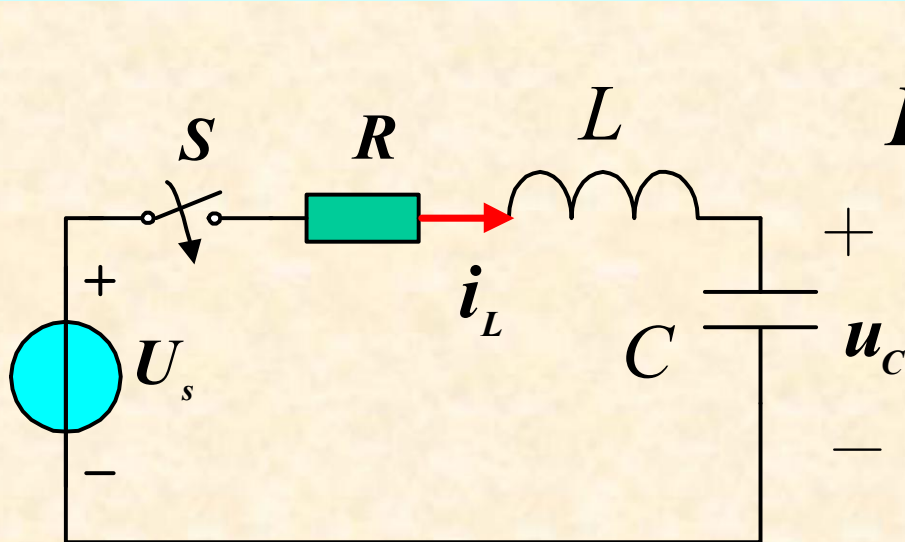
动态电路的阶数：

一阶电路：一阶微分方程所描述的电路。

二阶电路：二阶微分方程所描述的电路。

高阶电路：高阶微分方程所描述的电路。

四、电路中初始条件的确定



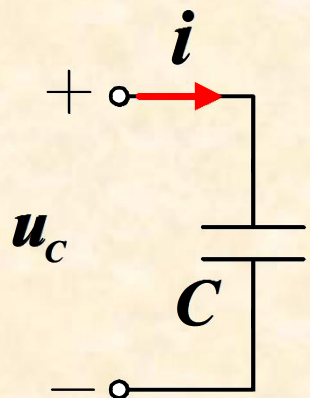
$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s \quad (t > 0)$$

初始条件为 $t = 0_+$ 时 u_C 、 i_L 的值。

初始条件：设描述电路动态过程的微分方程为 n 阶，初始条件为所求变量（电压或电流）及其 $(n-1)$ 阶导数在 $t=0_+$ 时的值，也称初始值。

独立初始条件：电容电压 u_c 和电感电流 i_L 的初始值，即 $u_c(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 称独立的初始条件。

非独立初始条件：除 $u_c(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 以外的初始值，即为非独立初始条件，如： $i_c(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 、 $u_R(0_+)$ 等。



线性电容

$$q_c(t) = \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi = q_c(t_0) + \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi = u_c(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi$$

式中 q_c 、 u_c 和 i 分别为电容的电荷、电压与电流。

$$i = \frac{dq_c}{dt}$$

令 $t_0 = 0_-$, $t = 0_+$:

$$q_c(0_+) = q_c(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i(\xi) d\xi$$

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i(\xi) d\xi$$

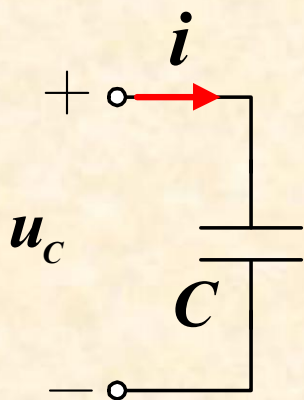
电荷守恒

当 $i(t)$ 为有限值时, $\int_{0_-}^{0_+} i(\xi) d\xi = 0$

$$q_c(0_+) = q_c(0_-)$$

$$u_c(0_+) = u_c(0_-)$$

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，
则电容电压（电荷）换路前后保持不变。



若： $u_C(0_-)=0$

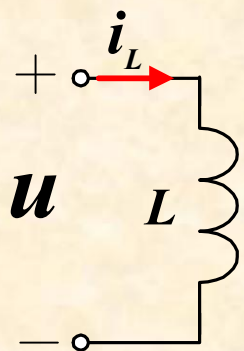
则： $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$

在换路瞬间电容相当于短路。

若： $u_C(0_-)=U_0$

则： $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$

在换路瞬间电容相当于一个电压值为 U_0 的电压源。



线性电感

$$\Psi_L(t) = \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = \Psi_L(t_0) + \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = i_L(t_0) + \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi$$

$$u = \frac{d\Psi_L}{dt}$$

$$\Psi_L = Li_L$$

式中 Ψ_L 、 u 和 i_L 分别为电感的磁通链、电压与电流。

令 $t_0 = 0_-$, $t = 0_+$:

$$\Psi_L(0_+) = \Psi_L(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} u(\xi) d\xi$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u(\xi) d\xi$$

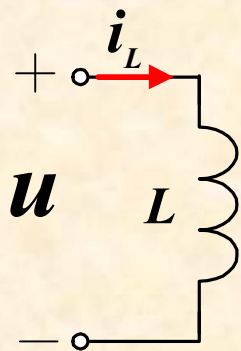
当 $u(t)$ 为有限值时, $\int_{0-}^{0+} u(\xi) d\xi = 0$

磁链守恒

$$\Psi_L(0_+) = \Psi_L(0_-)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

换路瞬间, 若电感电压保持为有限值,
则电感电流 (磁链) 换路前后保持不变。



若: $\dot{i}_L(0_-)=0$

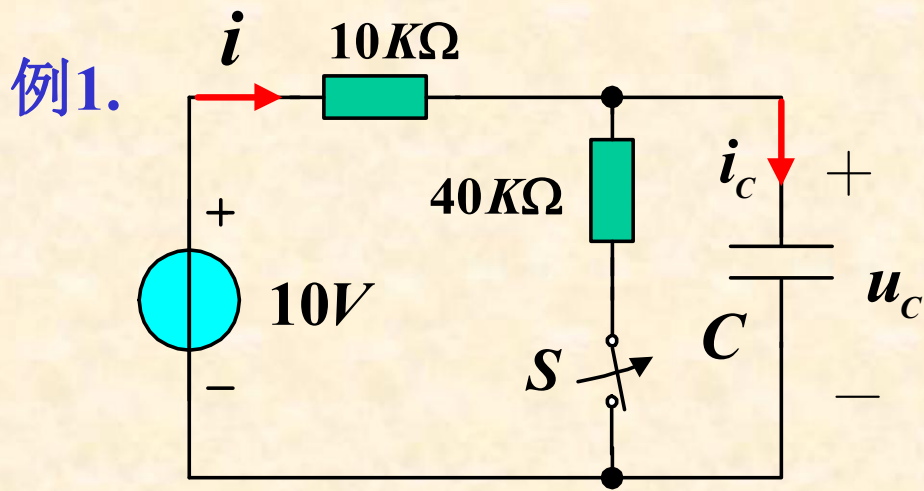
则: $\dot{i}_L(0_+)=\dot{i}_L(0_-)=0$

在换路瞬间电容相当于开路。

若: $\dot{i}_L(0_-)=I_0$

则: $\dot{i}_L(0_+)=\dot{i}_L(0_-)=I_0$

在换路瞬间电感相当于一个电流值为 I_0 的电流源。



$t = 0$ 时打开开关S.

求 $u_C(0_+)$, $i_C(0_+)$, $i(0_+)$ 。

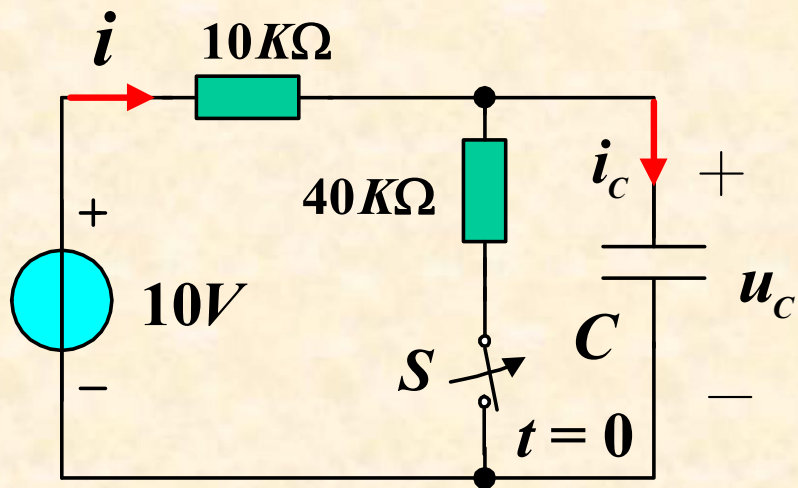
解： 独立初始条件

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

非独立初始条件 $i_C(0_+)$: 0_+ 等效电路:

电容用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源替代;

电感用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源替代。



开关闭合时：
直流电路C相当于开路。

$$u_c(0_-) = \frac{10 \times 40}{10 + 40} = 8V$$

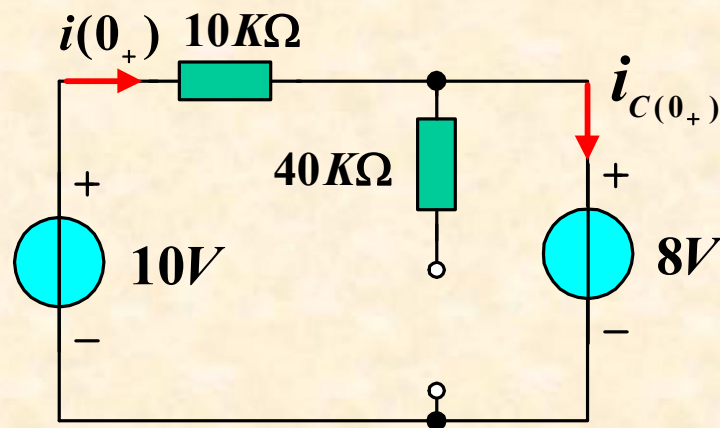
$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 8V$$



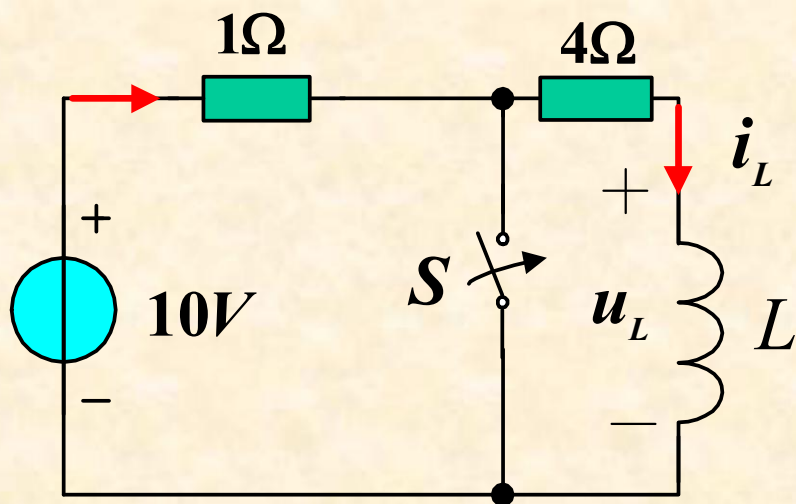
$$i_c(0_+) \neq i_c(0_-) = 0$$

0+等效电路：

$$i_c(0_+) = i(0_+) = \frac{10 - 8}{10} = 0.2\text{mA}$$



例2.



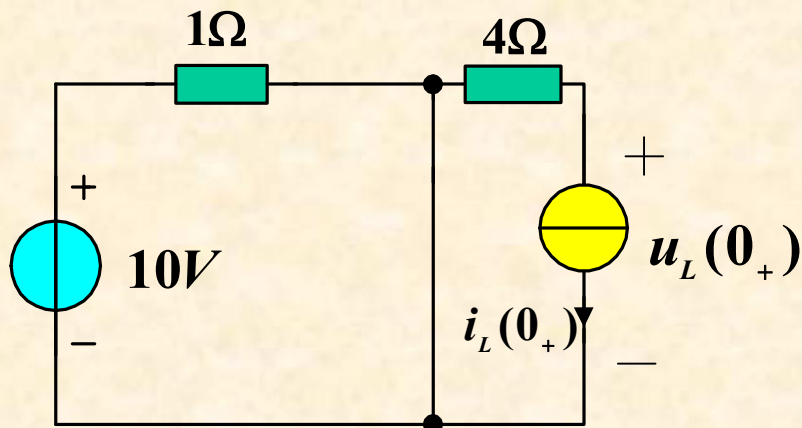
$t = 0$ 时闭合开关S。

求 $u_L(0_+)$ 。

解: $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2\text{A}$

0_+ 等效电路:

$$u_L(0_+) = -2 \times 4 = -8\text{V}$$



注意:

$$\because u_L(0_-) = 0 \quad \therefore u_L(0_+) = 0$$



归纳:

求初始值的一般方法:

独立初始条件

(1) 由换路前电路求 $u_c(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$;

(2) 由换路定则, 得 $u_c(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$;

非独立初始条件

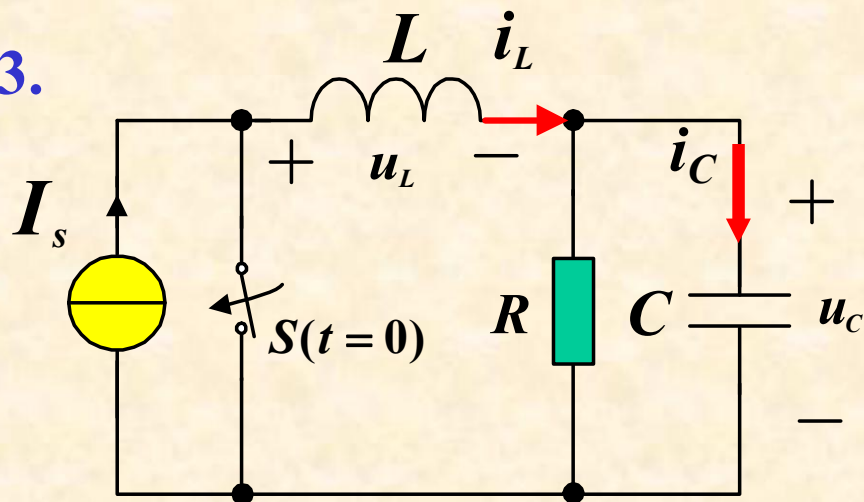
(3) 作 0_+ 等效电路:

电容用电压为 $u_c(0_+)$ 的电压源替代;

电感用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源替代。

(4) 由 0_+ 电路求所需的 $u(0_+)$ 、 $i(0_+)$ 等。

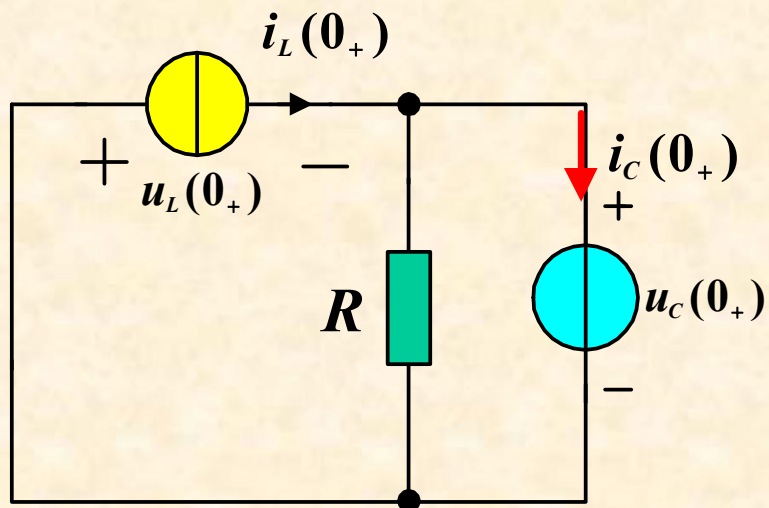
例3.



求 $i_C(0_+)$, $u_L(0_+)$.

解: $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_S$ $u_C(0_+) = u_C(0_-) = RI_S$

0_+ 电路:



$$u_L(0_+) = -u_C(0_+) = -RI_S$$

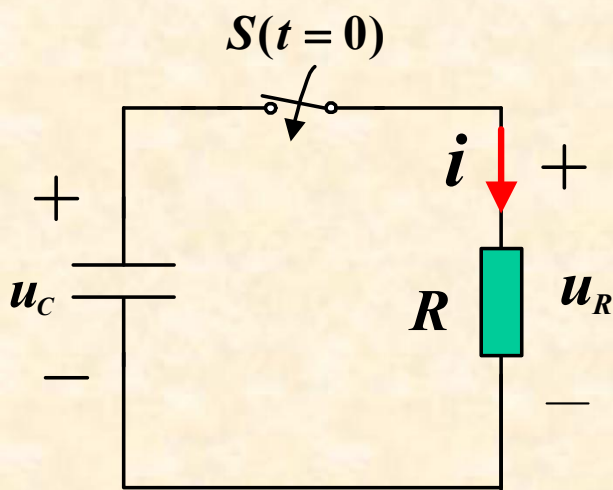
$$i_C(0_+) = i_L(0_+) - u_C(0_+)/R$$

$$= RI_S - RI_S = 0$$

11-2 一阶电路的零输入响应

零输入响应：激励(电源)为零，由初始储能引起的响应。

一、RC电路的零输入响应 (C对R放电) $u_C = u_R$



$$i = -C \frac{du_C}{dt}$$

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = 0$$

初始条件:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

$$u_C(0_-) = U_0$$

设此方程的通解: $u_C(t) = Ae^{pt}$

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = 0 \quad u_C(t) = Ae^{pt}$$

特征方程 $RCp+1=0$ 特征根: $p = -\frac{1}{RC}$

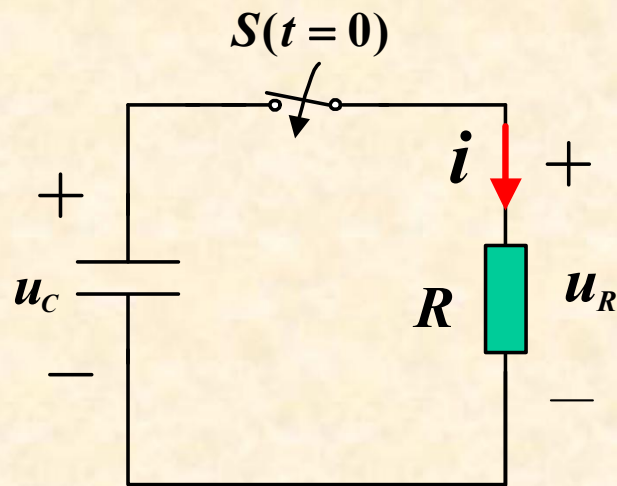
$\therefore u_C = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$ 初始条件:
 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$

$$U_0 = Ae^{-\frac{1}{RC}t} \Big|_{t=0} \quad \rightarrow A = U_0$$

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$

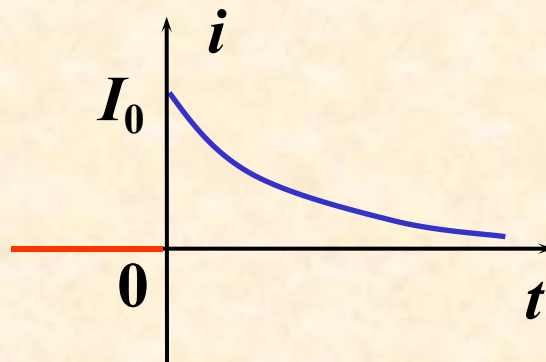
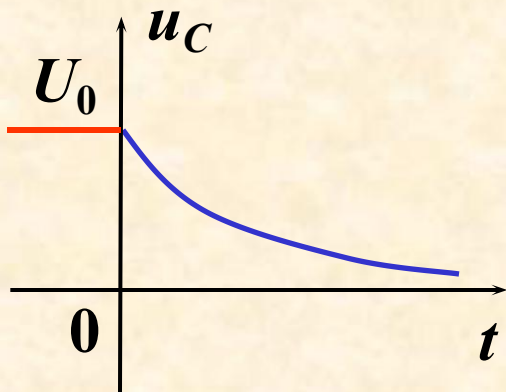
$$u_R = u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$



$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$(t > 0)$



u_C 、 i 、 u_R 按同样的指数规律变化，

令 $\tau = RC$ ， τ 具有时间的量纲，称 τ 为时间常数。

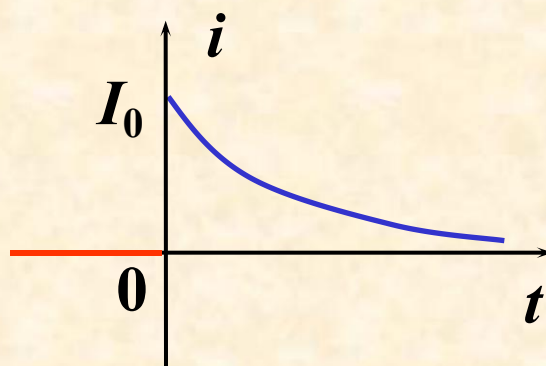
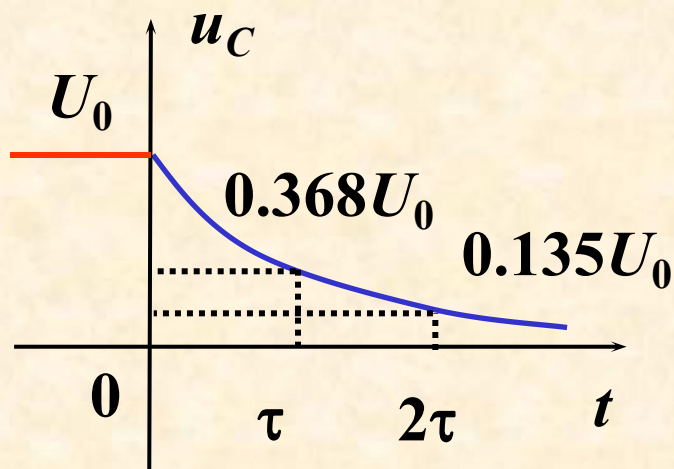
(欧 $\times$ 法=欧 $\times$ 库/伏=欧 $\times$ 安 $\times$ 秒/伏=秒)

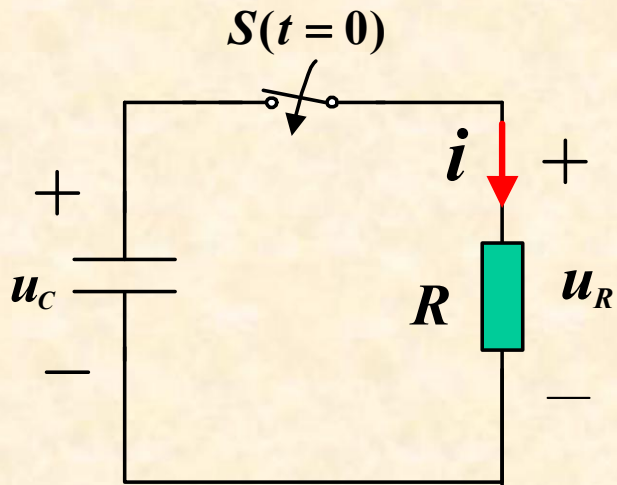
$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$

从理论上讲 $t \rightarrow \infty$ 时, 电路才能达到稳态. 但实际上一般认为经过 $3\tau - 5\tau$ 的时间, 过渡过程结束, 电路已达到新的稳态.

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.05U_0$	$0.02U_0$	$0.007U_0$

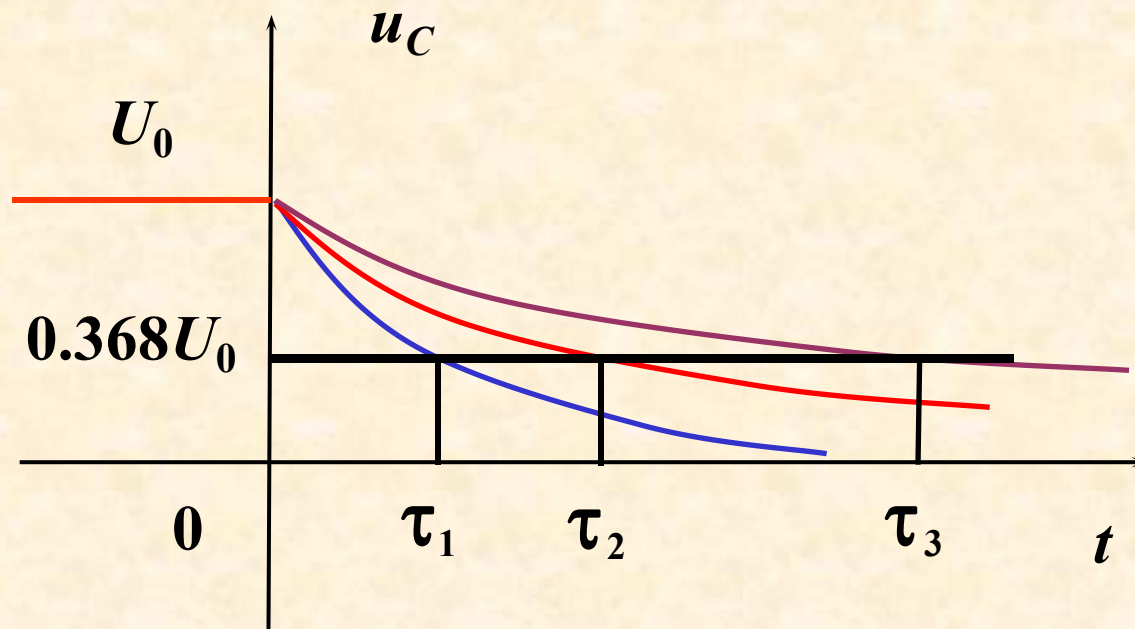




$$\tau_1 = 50\mu\text{s} \quad (R = 100\Omega, \quad C = 0.5\mu\text{F})$$

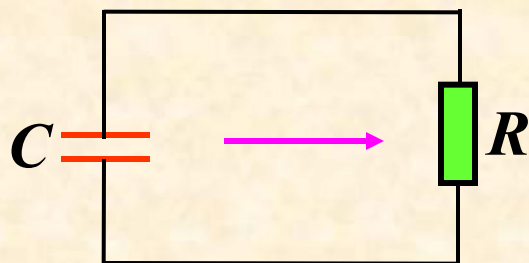
$$\tau_2 = 100\mu\text{s} \quad (R = 100\Omega, \quad C = 1\mu\text{F})$$

$$\tau_3 = 200\mu\text{s} \quad (R = 200\Omega, \quad C = 1\mu\text{F})$$



时间常数不一样，曲线衰减的快慢也不一样。

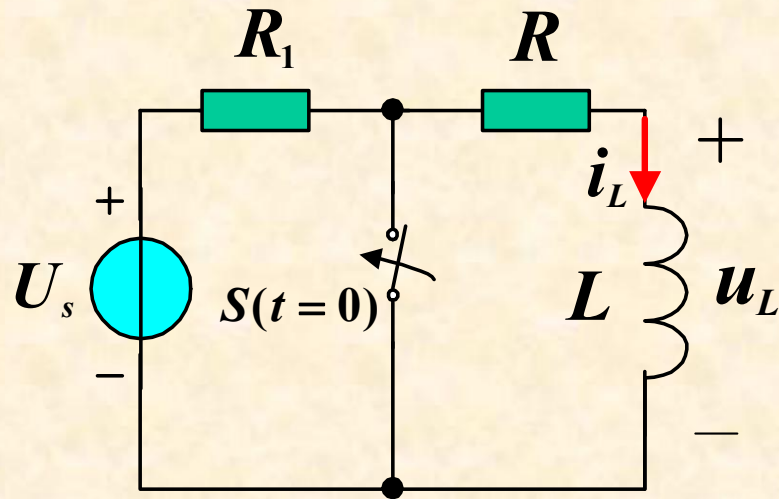
能量关系:



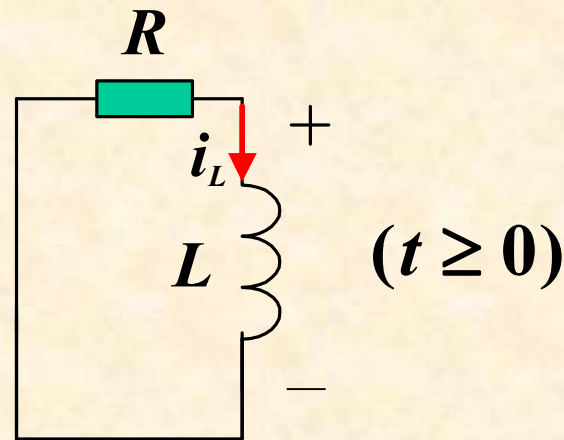
C 的能量不断释放, 被 R 吸收, 直到全部储能消耗完毕.

$$W_R = \int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R dt = \frac{1}{2} C U_0^2$$

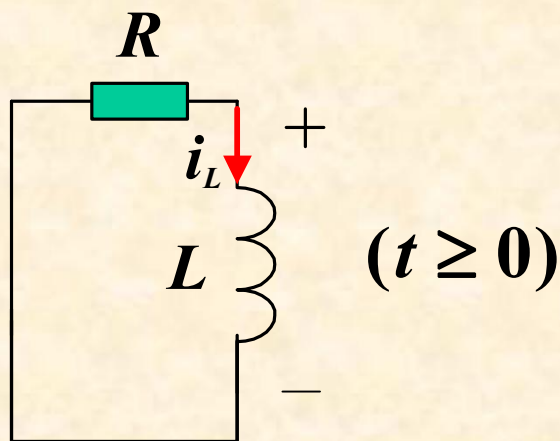
二、 RL 电路的零输入响应



$$i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R} = I_0$$



$$L \frac{di_L}{dt} + R i_L = 0$$



$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \quad (t \geq 0)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R} = I_0$$

其解答形式为: $i(t) = Ae^{pt}$

由特征方程 $Lp + R = 0$ 得 $p = -\frac{R}{L}$

由初值 $i_L(0_+) = I_0$ 得 $i(0_+) = A = I_0$

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t \geq 0)$$

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0)$$

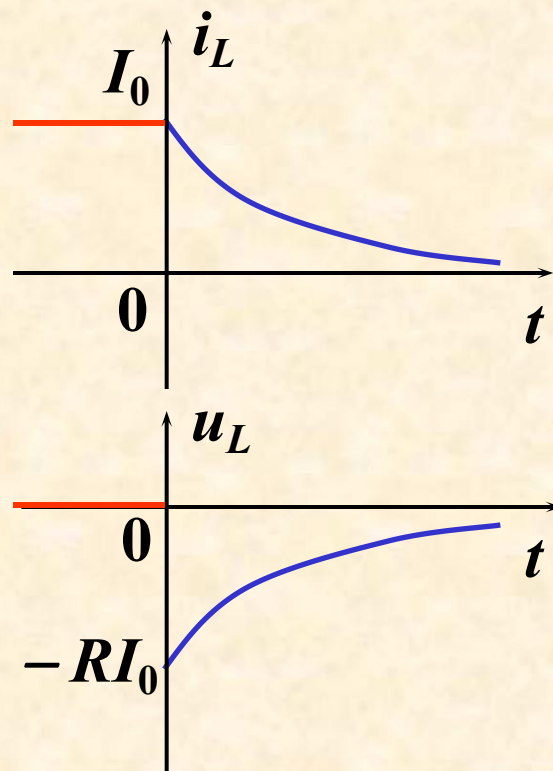
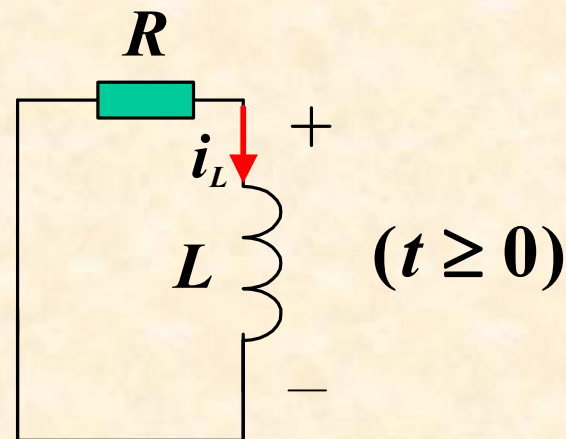
(1) i_L, u_L 以同一指数规律衰减到零;

(2) 衰减快慢取决于 L/R 。

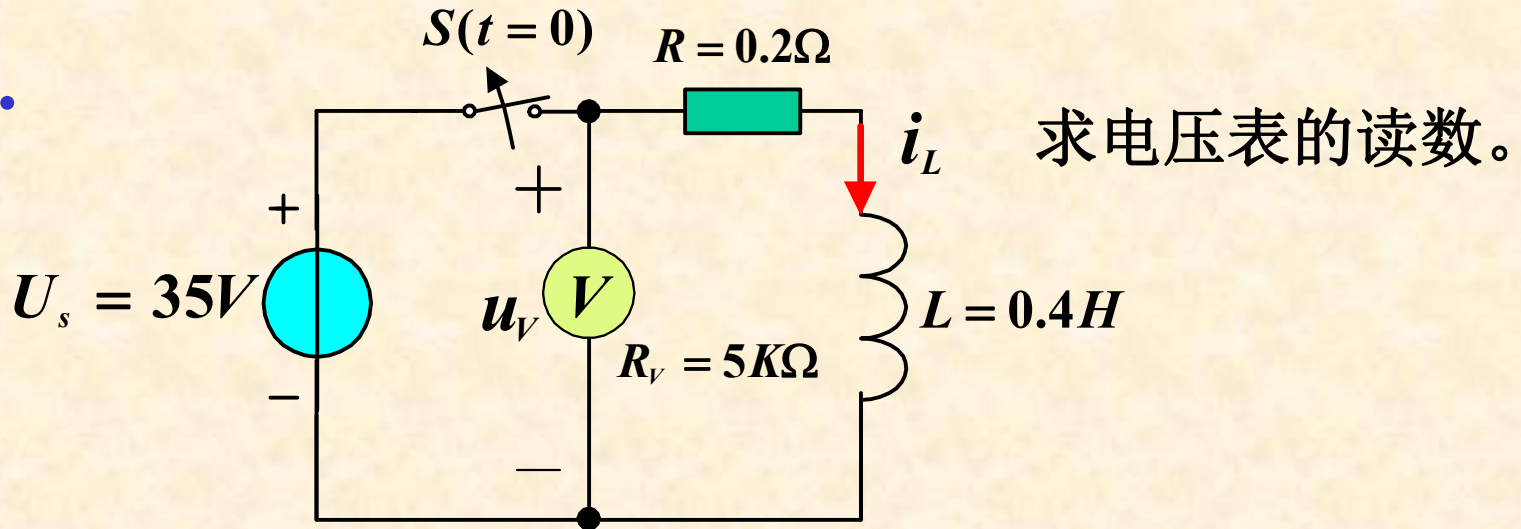
令 $\tau = L/R$ — RL 电路的时间常数

$3\tau - 5\tau$ 过渡过程结束。

量纲：亨/欧=韦/安*欧=韦/伏=伏*秒/伏=秒



例.

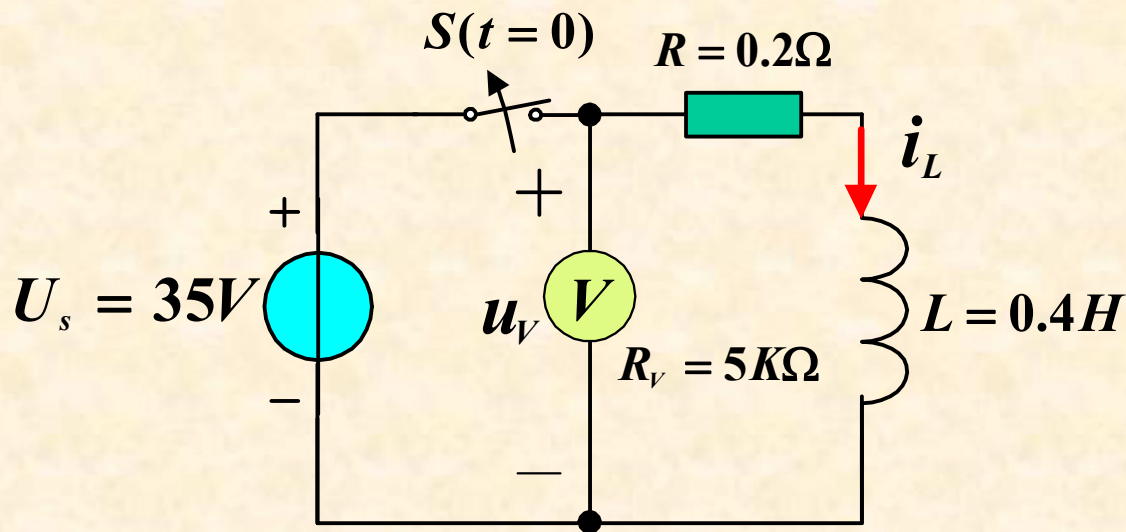


解:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_s}{R} = \frac{35}{0.2} = 175 \text{ A} = I_0$$

$$\tau = \frac{L}{R + R_v} = \frac{0.4}{5000} = 8 \times 10^{-5} \text{ s} = 80 \mu\text{s}$$

$$i_L = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 175 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0)$$



$$i_L = 175e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0)$$

$$u_v = -R_v i_L = -R_v I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = -875e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ kV} \quad (t > 0)$$

$$u_v(0_+) = -875KV$$

现象：电压表烧坏！

小结:

1. 一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应都是一个指数衰减函数。

$$u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$(t \geq 0)$$

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$(t \geq 0)$$

2. 衰减快慢取决于时间常数 τ .

RC 电路 : $\tau = RC$, RL 电路: $\tau = L/R$

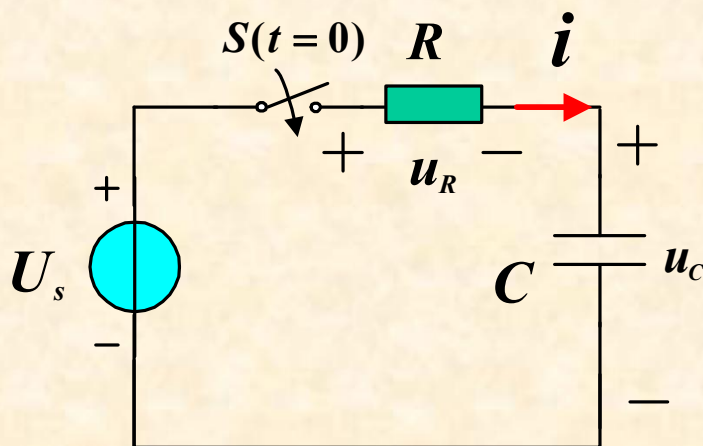
3. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。
4. 一阶电路的零输入响应和初值成正比。

11-3 一阶电路的零状态响应

零状态响应：储能元件初始能量为零，在激励(电源)作用下产生的过渡过程。

1. RC电路的零状态响应

(1) 列方程：



$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s$$

非齐次线性常微分方程

$$u_C(0_-)=0$$

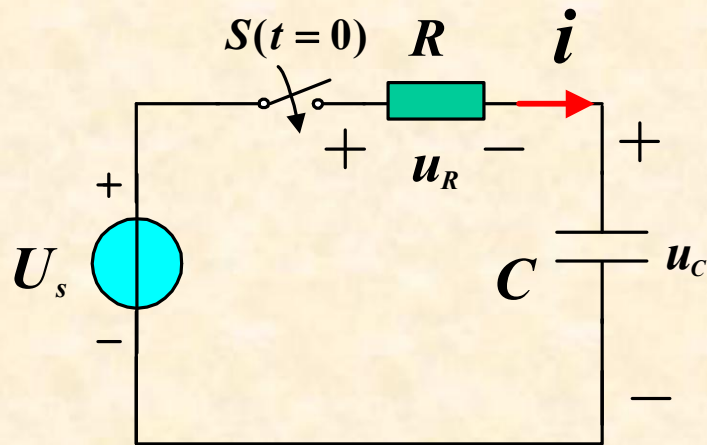
解答形式为：

$$u_C = \underbrace{u_C'}_{\text{特解}} + \underbrace{u_C''}_{\text{通解}}$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s$$

(2) 求特解 $u_C' = U_s$

强制分量 (稳态分量)



$$u_C(0_-) = 0$$

(3) 求齐次方程通解 u_C'' : 自由分量(暂态分量)

$$RC \frac{du_C''}{dt} + u_C'' = 0 \quad u_C'' = A e^{-\frac{t}{RC}}$$

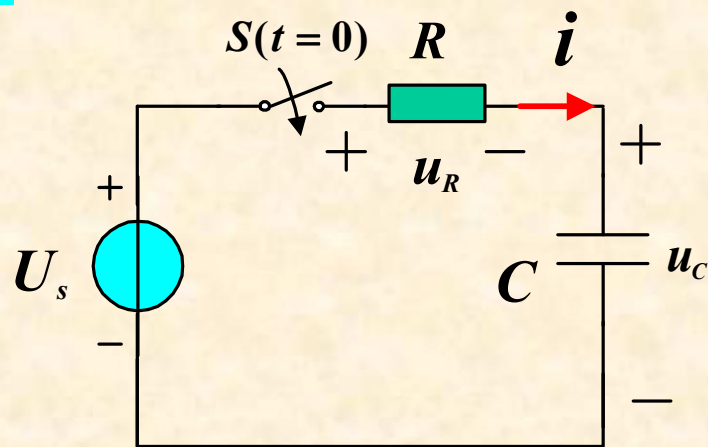
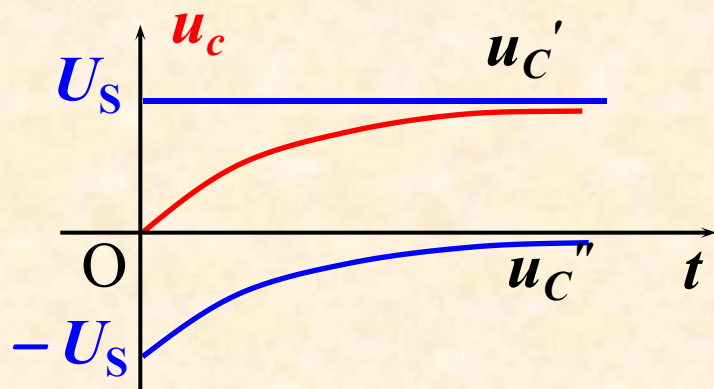
(4) 求全解 $u_C = u_C' + u_C'' = U_s + A e^{-\frac{t}{RC}}$

(5) 定常数 $u_C(0_+) = A + U_s = 0 \quad \therefore A = -U_s$

$$u_C = U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}} = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t > 0)$$

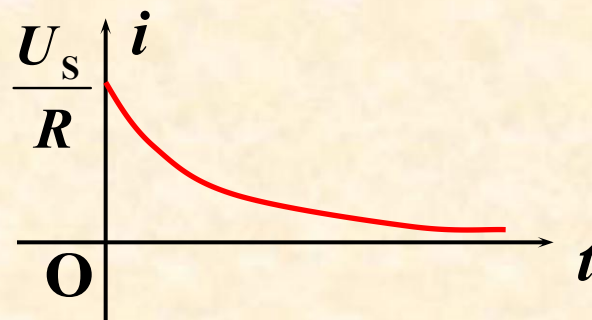
强制分量(稳态)

自由分量(暂态)



$$u_C(0_-) = 0$$

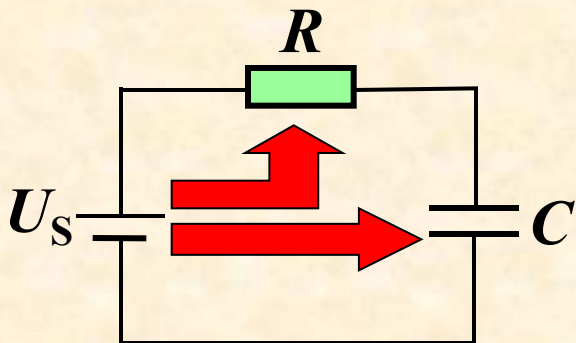
$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



能量关系:

电源提供的能量一部分被电阻消耗掉,

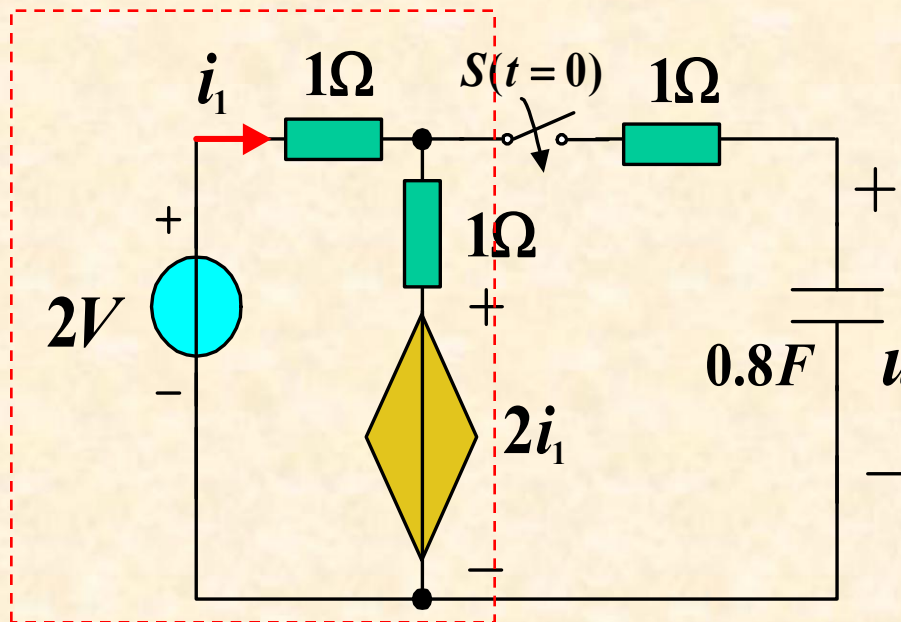
一部分储存在电容中, 且 $W_C = W_R$



$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^{\infty} p_R dt = \int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 R dt \\ &= \frac{U_s^2}{R} \left(-\frac{\tau}{2} \right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{2} C U_s^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} C U_s^2 = W_C \end{aligned}$$

充电效率为50%

例.

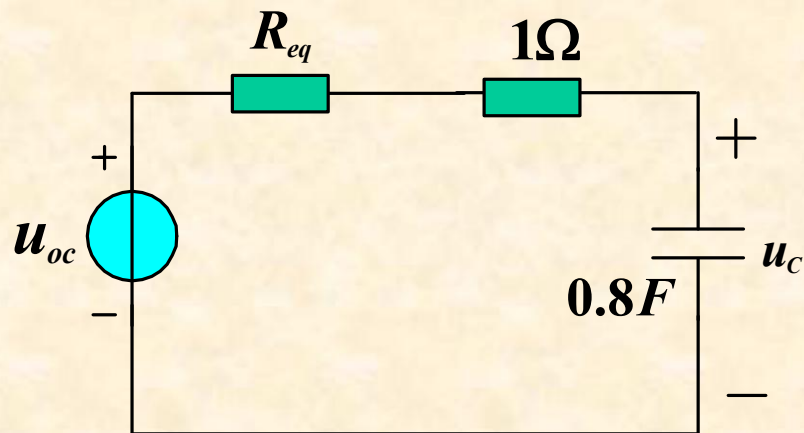
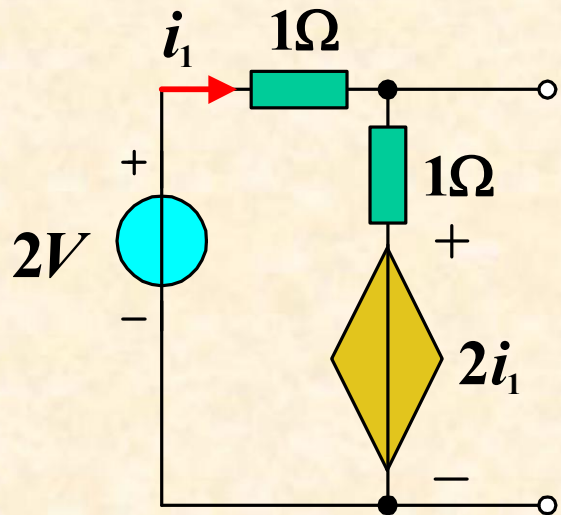


$t=0$ 时闭合开关S.

求 u_c 、 i_1 的零状态响应。

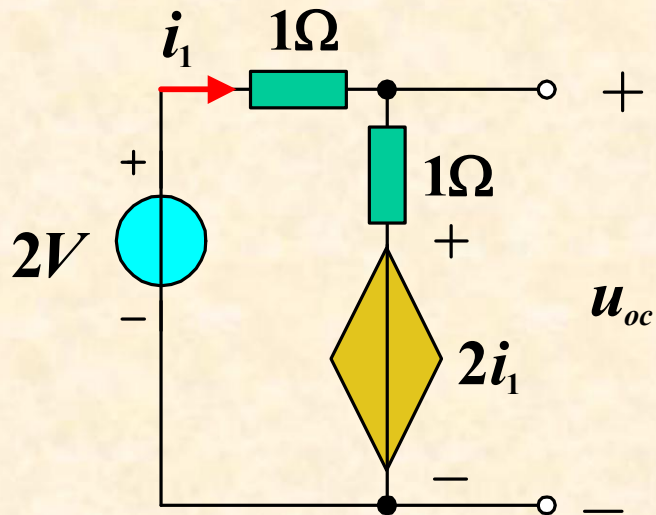
解:

戴维南等效.



求 u_c 的零状态响应

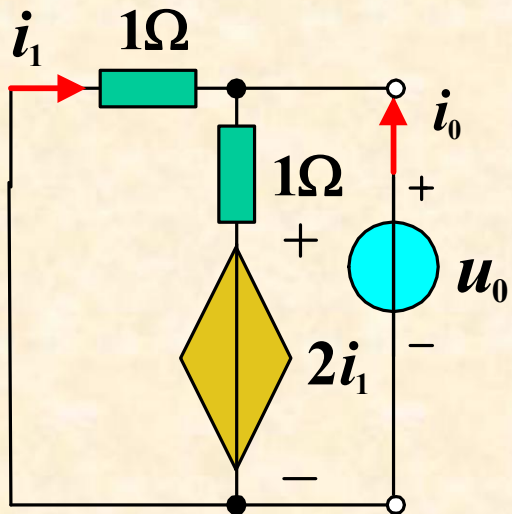
$$u_c = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t > 0)$$



$$1 \times i_1 + 1 \times i_1 + 2i_1 = 2$$

$$i_1 = 0.5 A$$

$$u_{oc} = 1 \times i_1 + 2i_1 = 1.5V$$

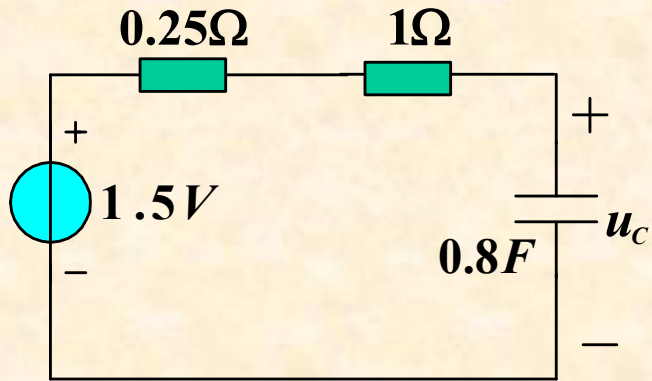


$$R_{eq} = \frac{u_0}{i_0}$$

$$u_0 = 1 \times (i_0 + i_1) + 2i_1$$

$$u_0 = -1 \times i_1$$

由上两式得: $u_0 = i_0 - 3u_0$ $R_{eq} = \frac{u_0}{i_0} = \frac{1}{4} \Omega$

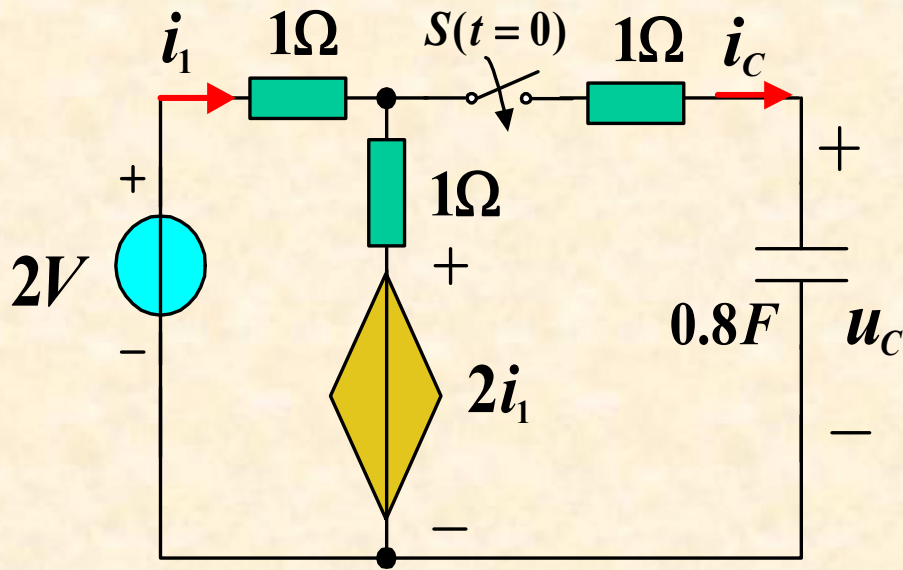


$$\tau = RC$$

$$= (1 + 0.25) \times 0.8 = 1 \text{ s}$$

$$u_c = 1.5(1 - e^{-t}) \text{ V} \quad (t > 0)$$

$$u_c = U_s(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t > 0)$$



$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = \frac{1.5}{1.25} e^{-t}$$

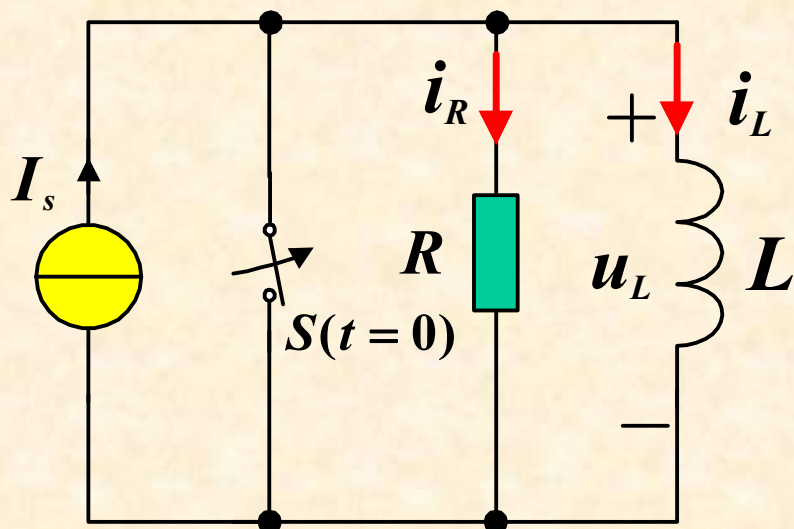
$$= 1.2e^{-t}$$

$$1 \times i_1 + 1 \times i_c + u_c = 2$$

$$i_1 = 2 - u_c - i_c$$

$$\therefore i_1 = 2 - 1.5(1 - e^{-t}) - 1.2e^{-t} = 0.5 + 0.3e^{-t} \quad t > 0$$

2. RL 电路的零状态响应



$$i_L(0_-) = 0$$

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = I_s$$

$$i_L = I_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t > 0$$

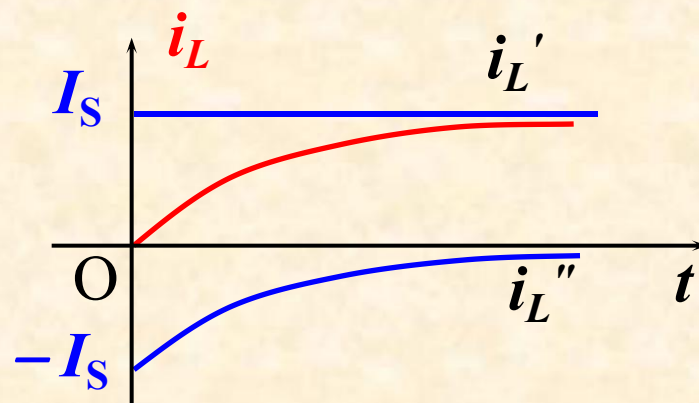
$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U_s e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U_s$$

$$u_c = U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t > 0)$$

$$\tau = RC$$



小结:

1. 一阶电路的零状态响应是储能元件无初始储量时，由输入激励引起的响应。解答有二个分量：

$$u_C = u_C' + u_C''$$

$$u_C = U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}} = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t > 0)$$

2. 时间常数与激励源无关。
3. 线性一阶网络的零状态响应与激励成正比。

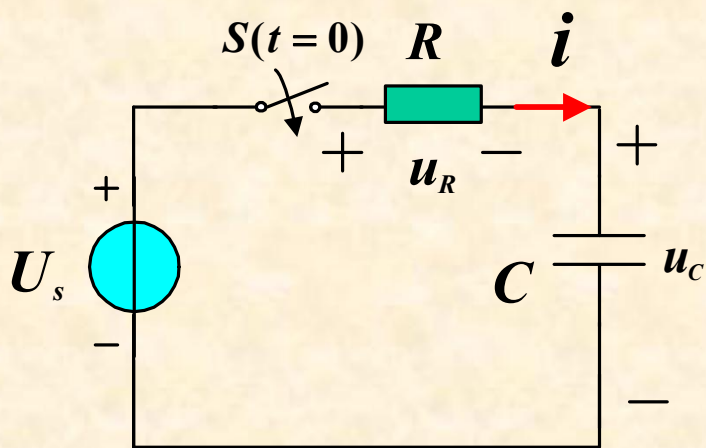
11-4 一阶电路的全响应

全响应：非零初始状态的电路受到激励时电路中产生的响应。

一、一阶电路的全响应及其两种分解方式

1. 全解 = 强制分量(稳态解)+自由分量(暂态解)

以RC电路为例



$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s \quad \text{非齐次方程}$$

解为 $u_C(t) = u_C' + u_C''$

$$u_C' = U_s \quad u_C'' = Ae^{pt}$$

$$u_C(0_-) = U_0$$

$$u_C = U_s + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = RC$$

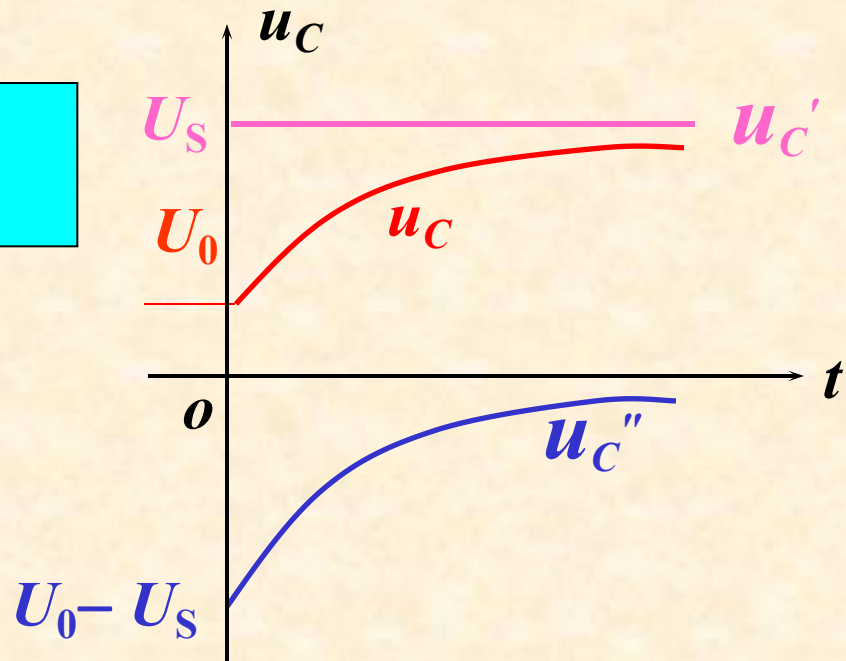
$$u_C = U_s + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad u_C(0_-) = U_0$$

$$u_C(0_+) = A + U_s = U_0 \quad \therefore A = U_0 - U_s$$

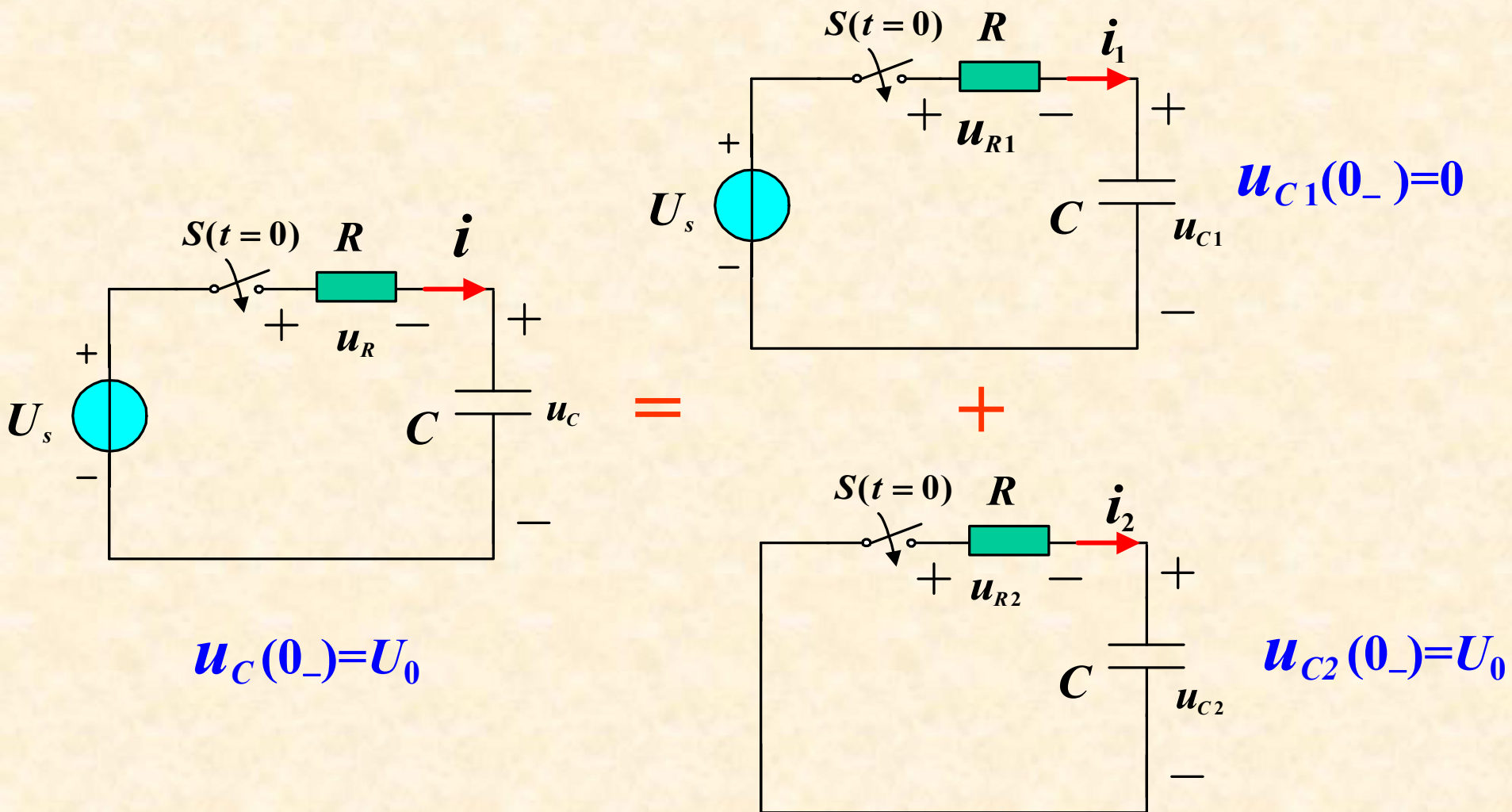
$$\therefore u_C = \underline{U_s} + \underline{(U_0 - U_s)e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (t > 0)$$

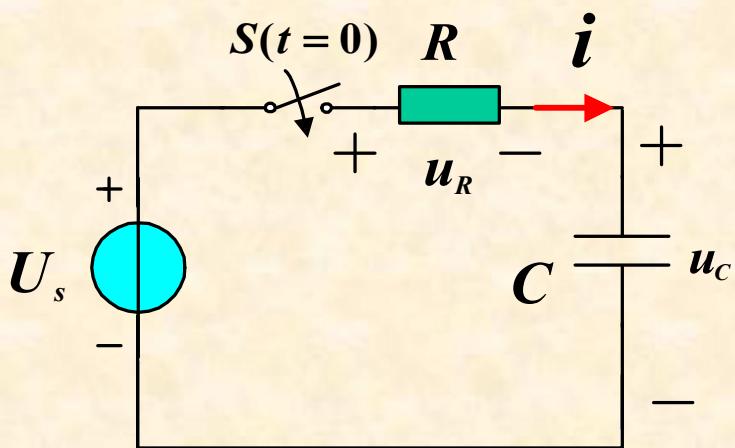
强制分量
(稳态解)

自由分量
(暂态解)



2. 全响应= 零状态响应 + 零输入响应



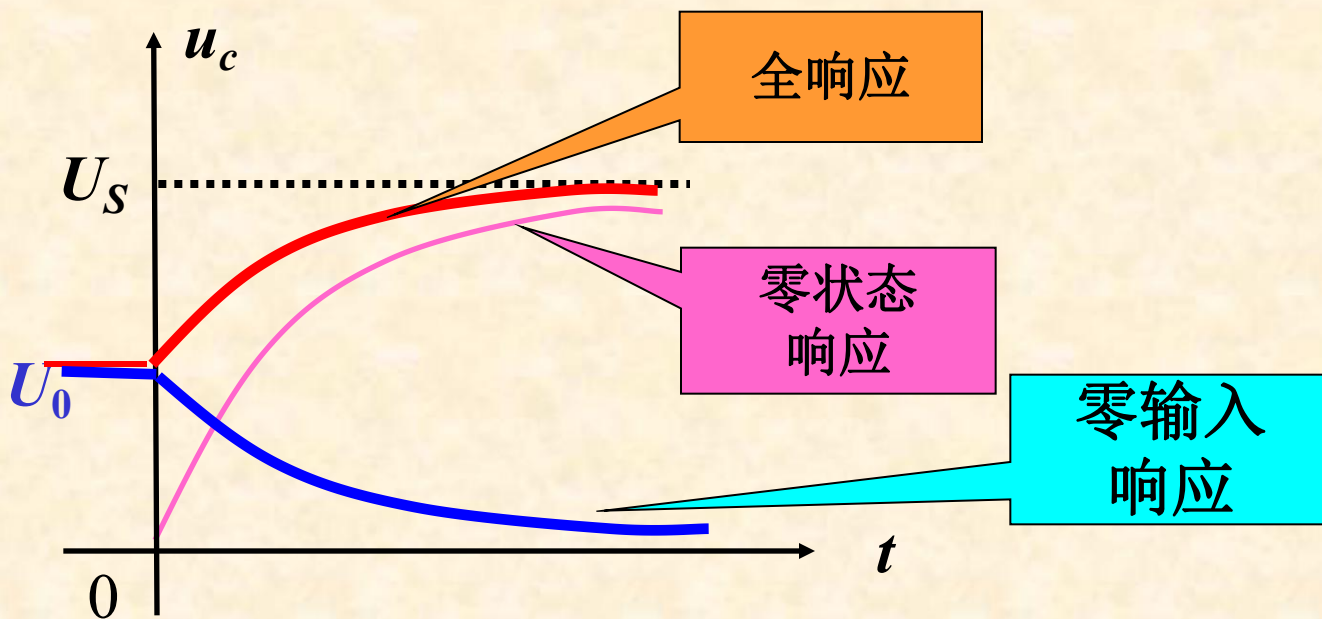


$$u_c = \underline{U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})} + \underline{U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (t \geq 0)$$

零状态
响应

零输入
响应

$$u_c(0_-) = U_0$$



全响应小结:

1. 全响应的不同分解方法只是便于更好地理解过渡过程的本质;
2. 零输入响应与零状态响应的分解方法其本质是叠加, 因此只适用于线性电路;
3. 零输入响应与零状态响应均满足齐性原理, 但全响应不满足。

二、用三要素法分析一阶电路

一阶电路的数学描述是一阶微分方程，其解的一般形式为

$$f(t) = f_{\text{特解}}(t) + f_{\text{通解}}(t) = f'(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

特解与外施激励的变化规律有关，所以称为强制分量。

通解只取决于特征根，称为自由分量。

$$\text{令 } t = 0_+ \text{ 则 } f(0_+) = f'(0_+) + A \quad A = f(0_+) - f'(0_+)$$

$$\text{三要素} \quad \begin{cases} \tau & \text{时间常数} \\ f(0_+) & \text{初始值} \\ f'(t) & \text{稳态解} \end{cases}$$

$$f(t) = f'(t) + (f(0_+) - f'(0_+))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1、 τ 时间常数

$$\text{RC电路} \quad \tau = RC \quad \text{RL电路} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

R为C或L两端的等效电阻。

2、 $f(0_+)$ 初始值

独立初始条件 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$;

非独立初始条件 画 0_+ 等效电路, 求所需的 $u(0_+)$ 、 $i(0_+)$ 等。

3、 $f(t)$ 稳态解 电路达到稳态时的解。

$$f(t) = f'(t) + (f(0_+) - f'(0_+))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

直流激励: $f'(t) = f(\infty)$ C开路、L短路

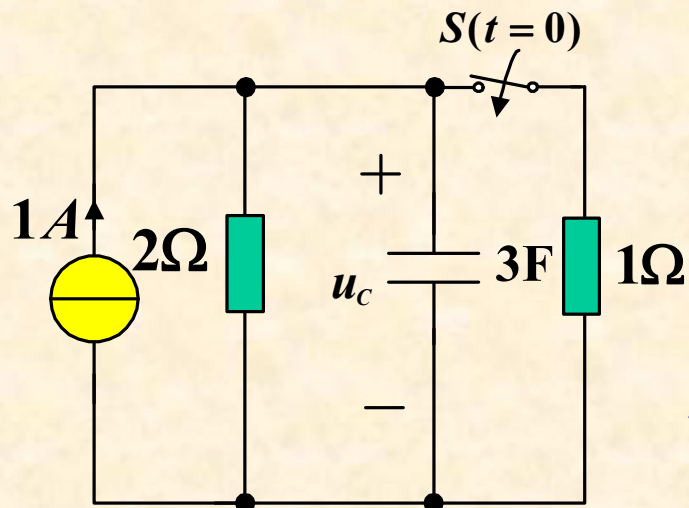
$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{直流激励})$$

正弦激励: $f(t)$: 电路稳态解。(采用相量分析法)

$$f(t) = f'(t) + [f(0_+) - f'(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$f(0_+)$: $f(t)$ 在 $t=0$ 时的值。

例1.



已知： $t=0$ 时合开关S。

求换路后的 $u_c(t)$ 。

解

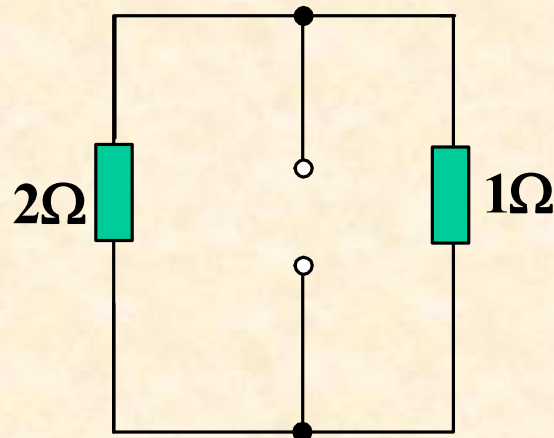
用三要素法

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = R_{eq}C = \frac{2}{3} \times 3 = 2 \text{ s}$$

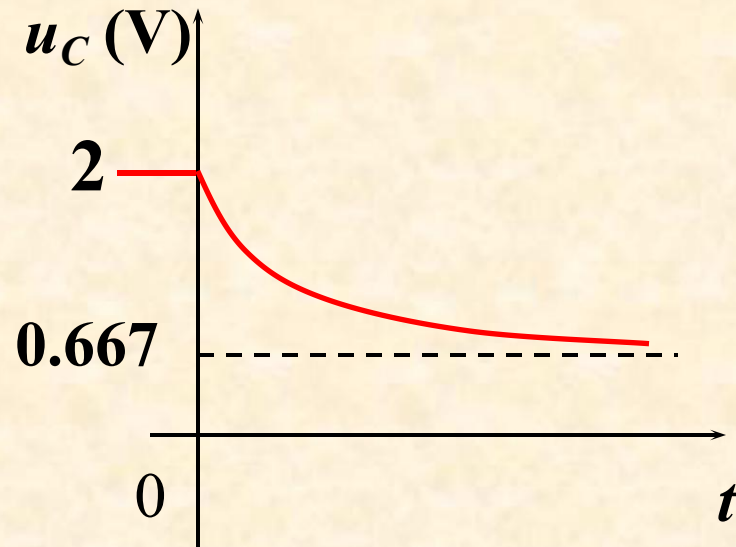
$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 2 \text{ V}$$

$$u_c(\infty) = \frac{2}{2+1} \times 1 = 0.667 \text{ V}$$

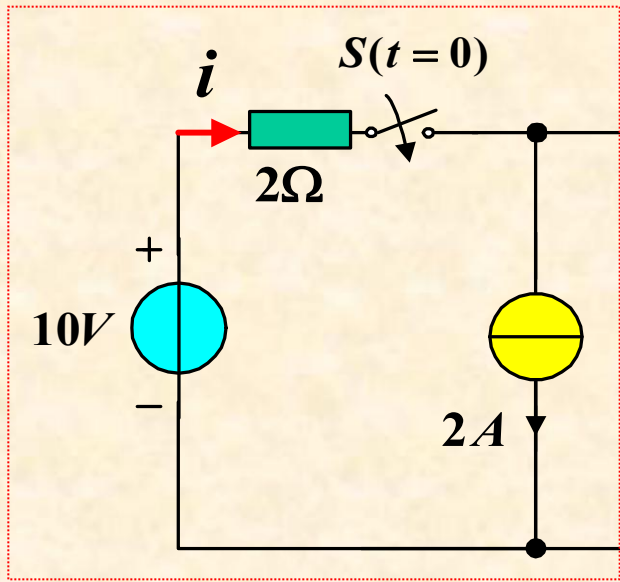


$$u_c = 0.667 + (2 - 0.667)e^{-0.5t} = 0.667 + 1.33e^{-0.5t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

$$u_C(t) = 0.667 + 1.33e^{-0.5t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$



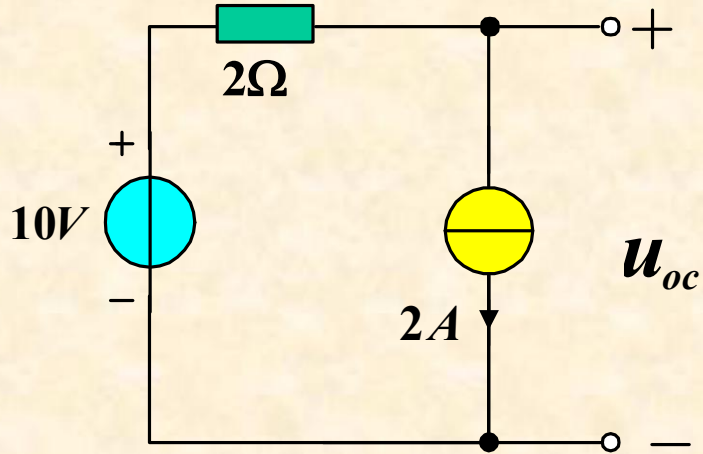
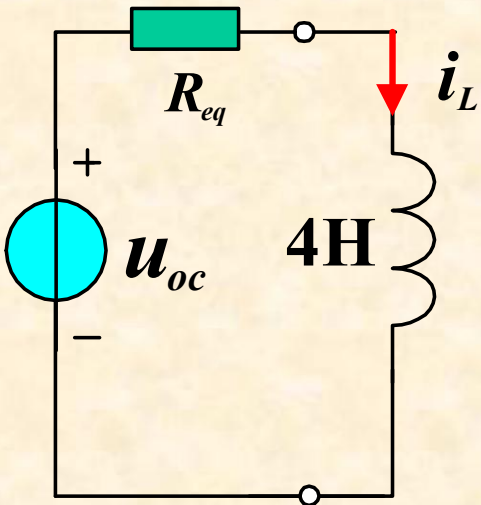
例2.



S闭合后的 $i_L(t)$ 和 $i(t)$ 。

解 用三要素法

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$$u_{oc} = 10 - 2 \times 2 = 6V$$

$$R_{eq} = 2\Omega$$

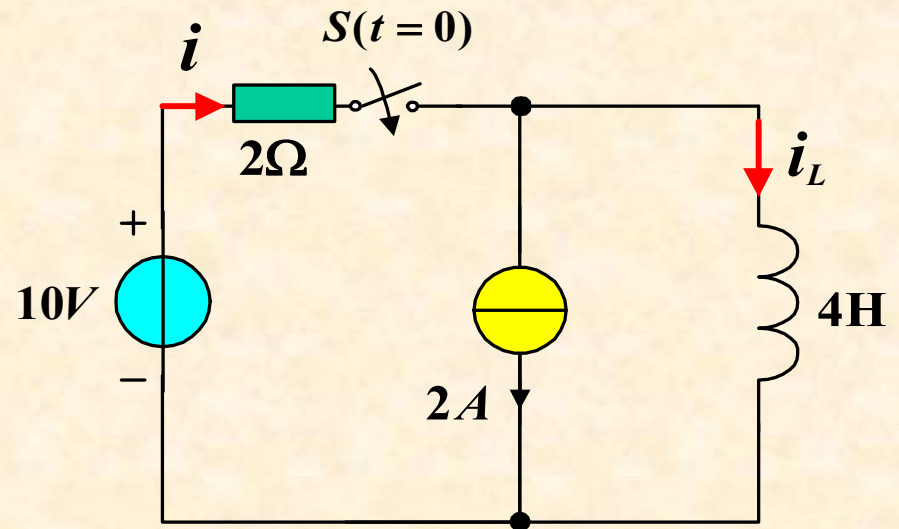
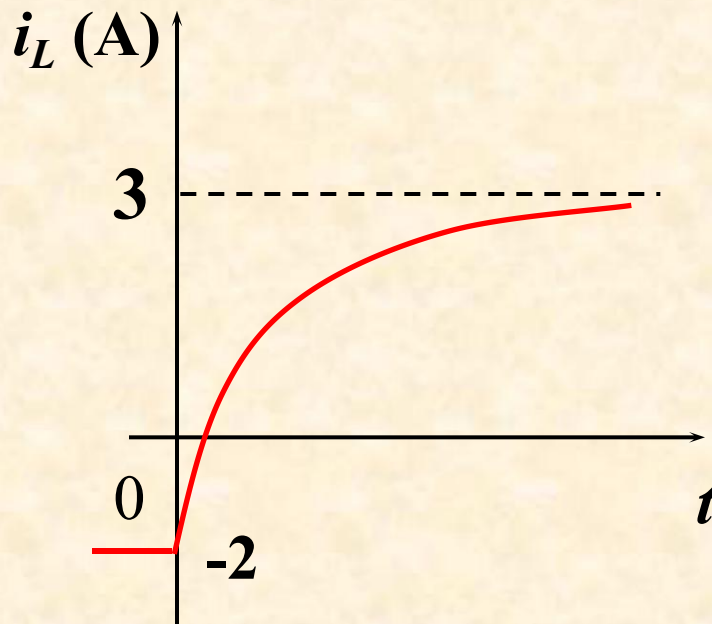
$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 2s$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = -2A$$

$$i_L(\infty) = \frac{U_{oc}}{R_{eq}} = 3A$$

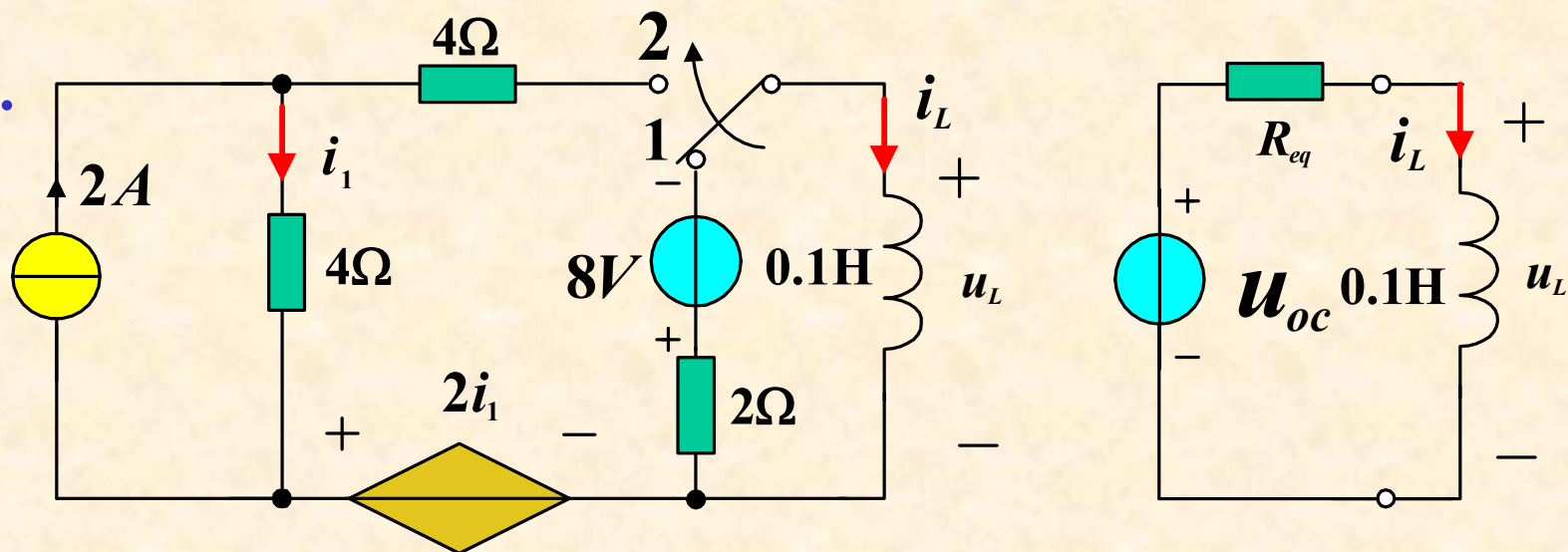
$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L(t) = 3 + [-2 - 3]e^{-\frac{t}{2}} = 3 - 5e^{-\frac{t}{2}} \text{ A}$$



$$i = 2 + i_L = 5 - 5e^{-\frac{t}{2}} \text{ A}$$

例3.



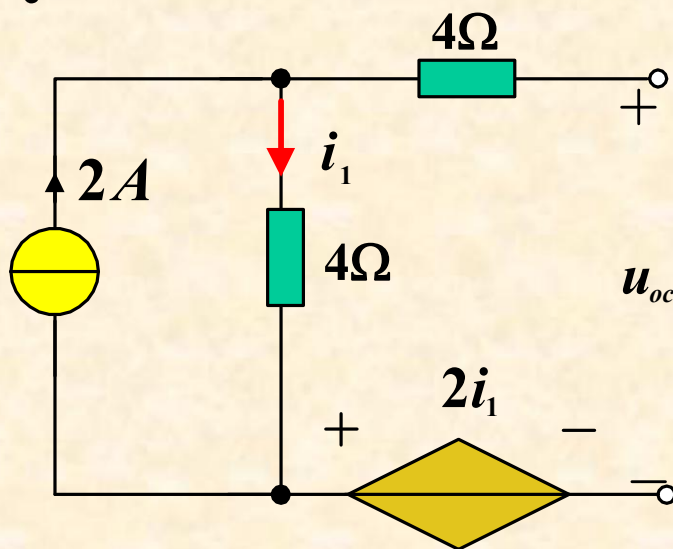
开关在1时已达到稳定状态。 $t=0$ 时，开关由1合向2，求：
 $t \geq 0$ 时的电压 $u_L(t)$ 。

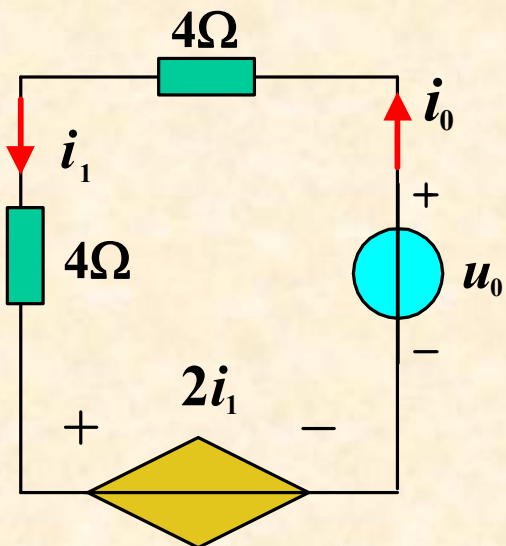
解： 开关在1:

$$i_L(0_-) = -\frac{8}{2} = -4\text{A}$$

$$\begin{aligned} u_{oc} &= 4i_1 + 2i_1 \\ &= 12\text{V} \end{aligned}$$

开关在2:

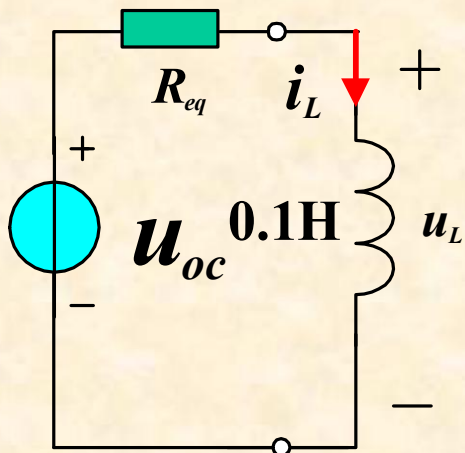




$$u_0 = 4i_1 + 4i_1 + 2i_1 = 10i_0$$

$$R_{eq} = \frac{u_0}{i_0} = 10\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0.1}{10} = 0.01s$$



$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = -4A$$

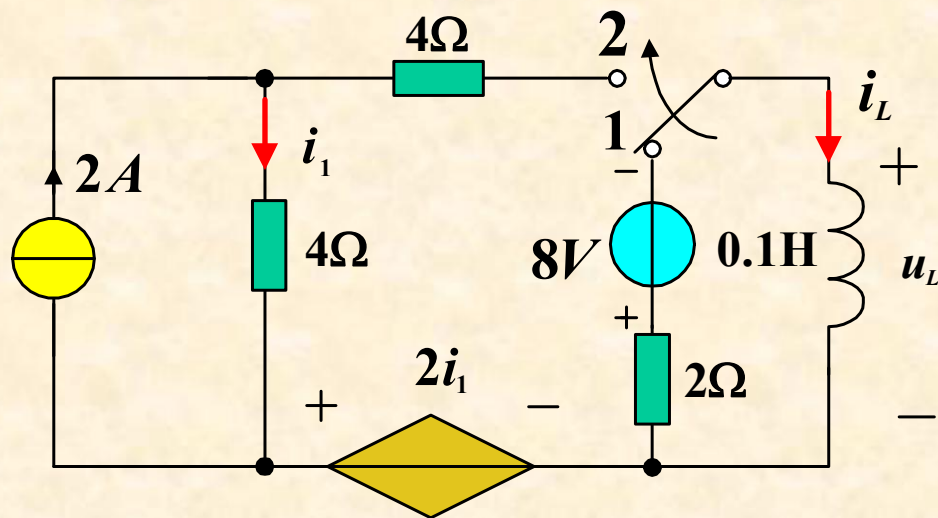
$$i_L(\infty) = \frac{u_{oc}}{R_{eq}} = 1.2A$$

$$i_L(t) = 1.2 + [-4 - 1.2]e^{-\frac{t}{0.01}}$$

$$u_{oc} = 12V$$

$$i_L(0_-) = -4A$$

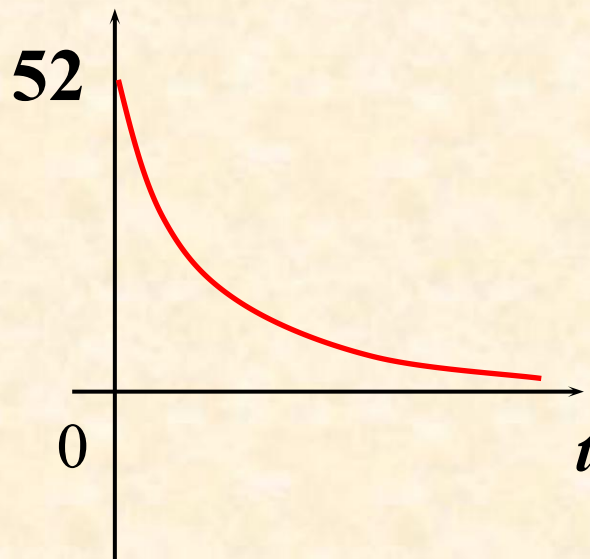
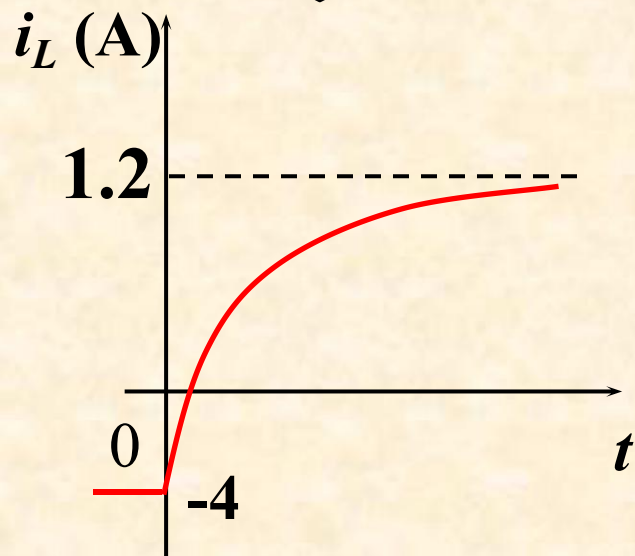
$$= (1.2 - 5.2e^{-100t}) A$$



$$i_L = (1.2 - 5.2e^{-100t}) \text{ A}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 52e^{-100t}$$

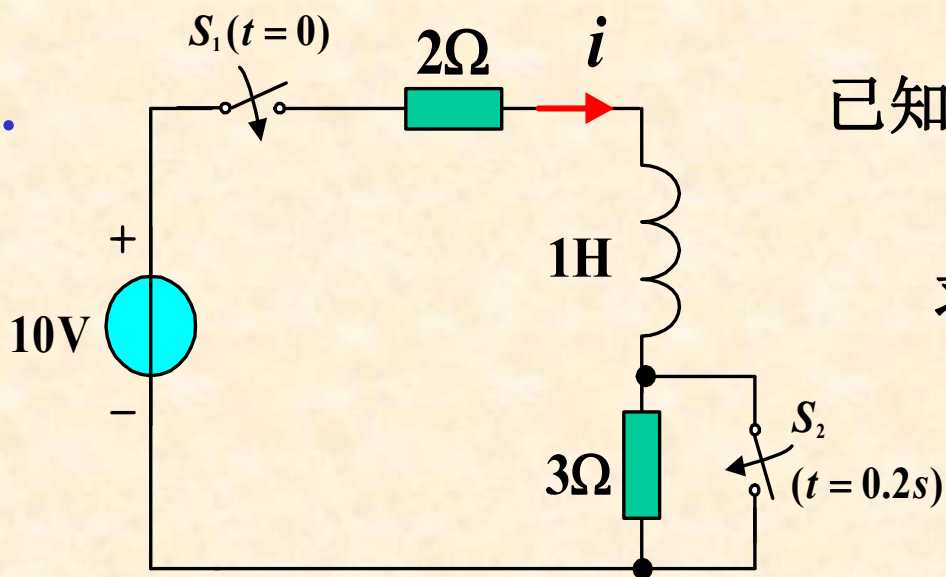
u_L (V)



思考： 如何根据三要素公式直接求 $u_L(t)$ ？

$$u_L(t) = u_L(\infty) + [u_L(0_+) - u_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

例5.



已知：电感无初始储能 $t = 0$ 时合 S_1 , $t = 0.2\text{s}$ 时合 S_2 。

求换路后的电感电流 $i(t)$ 。

解：

$$0 < t < 0.2\text{s}$$

$$i(0_+) = 0 \quad \tau_1 = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ s}$$

$$i(\infty) = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

$$i(t) = 2 - 2e^{-5t} \text{ A}$$

$$t > 0.2\text{s}$$

$$i(0.2_-) = 2 - 2e^{-5 \times 0.2} = 1.26 \text{ A}$$

$$i(0.2_+) = 1.26 \text{ A} \quad \tau_2 = 0.5 \text{ s}$$

$$i(\infty) = 5 \text{ A}$$

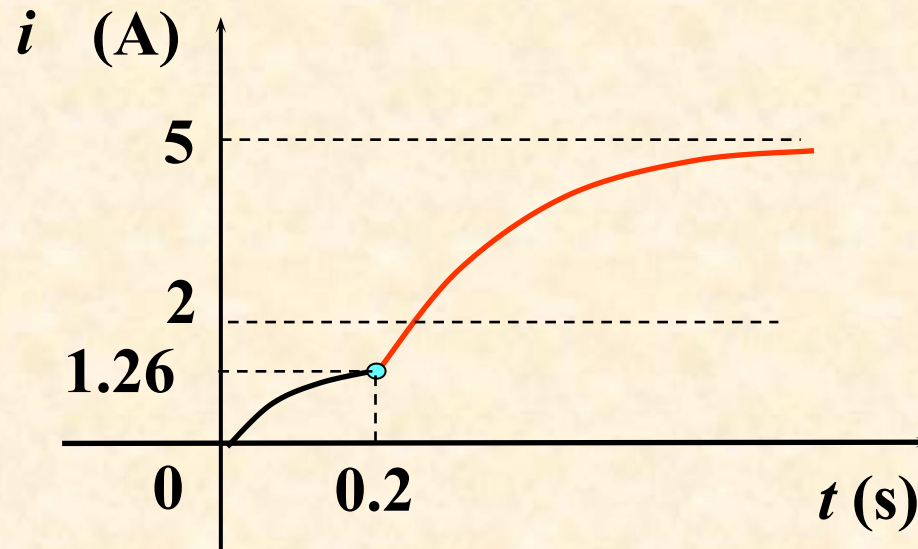
$$i(t) = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)} \text{ A}$$

$$0 < t < 0.2\text{s}$$

$$i(t) = 2 - 2e^{-5t} \text{ A}$$

$$t > 0.2\text{s}$$

$$i(t) = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)} \text{ A}$$

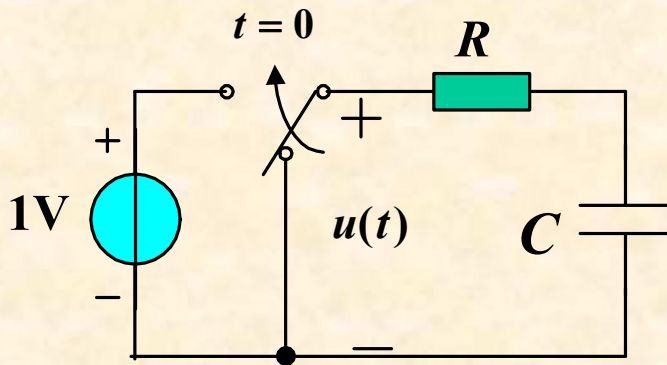
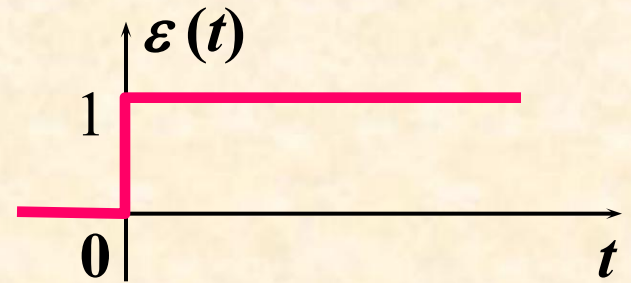


单位阶跃函数

单位阶跃函数是一种奇异函数。

1. 定义

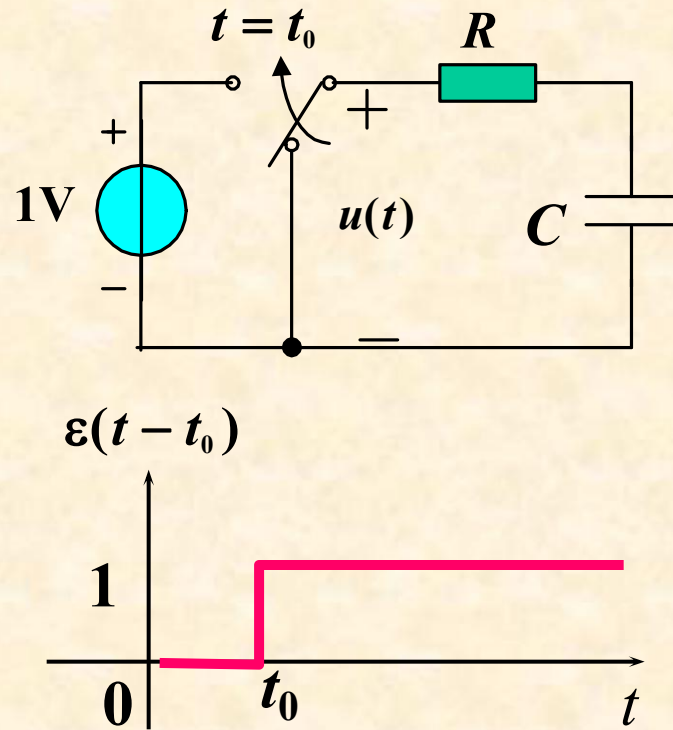
$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0_-) \\ 1 & (t \geq 0_+) \end{cases}$$



它在 $(0_-, 0_+)$ 时域内发生了单位阶跃。

2. 延迟单位阶跃函数

$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & (t \leq t_{0-}) \\ 1 & (t \geq t_{0+}) \end{cases}$$

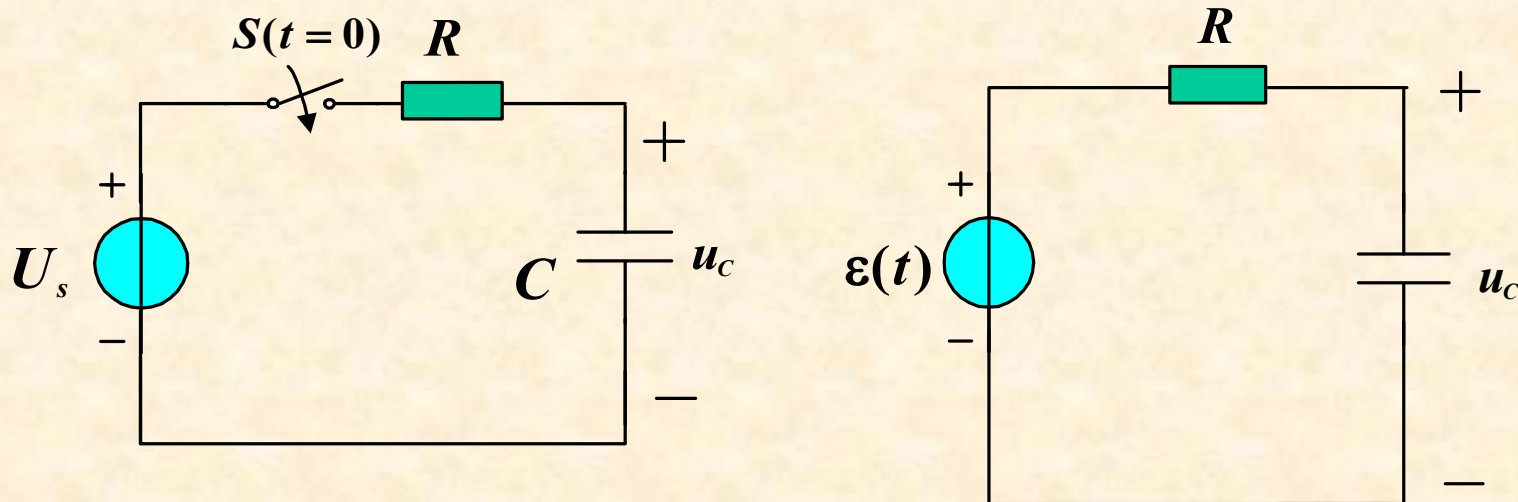


如果 t_0 接通的是2V的电压源:

$$2\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & (t \leq t_{0-}) \\ 2 & (t \geq t_{0+}) \end{cases}$$

3、单位阶跃响应

激励为单位阶跃函数的响应。

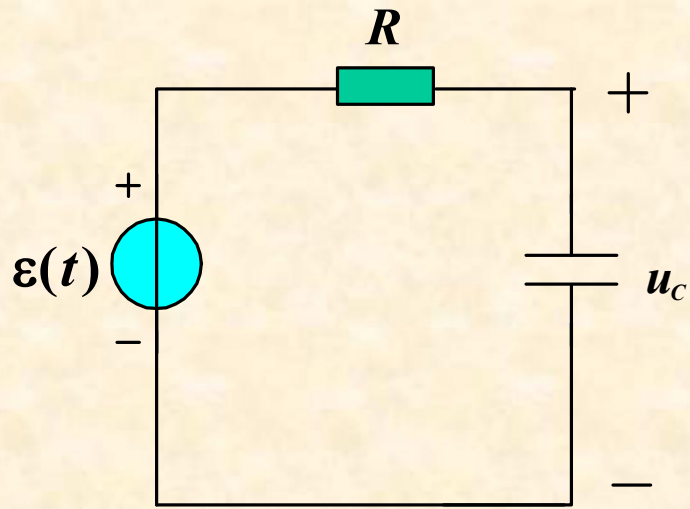


相当于在 $t=0$ 时接入了一个1V的电压源。

因此单位阶跃响应与直流激励的响应相同。

用 $s(t)$ 表示单位阶跃响应。

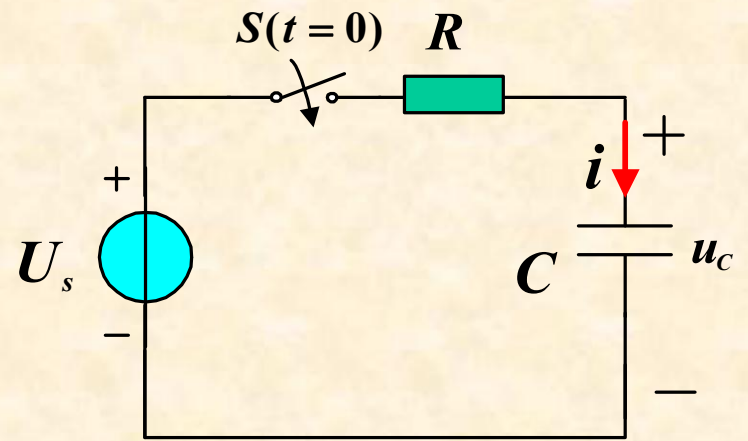
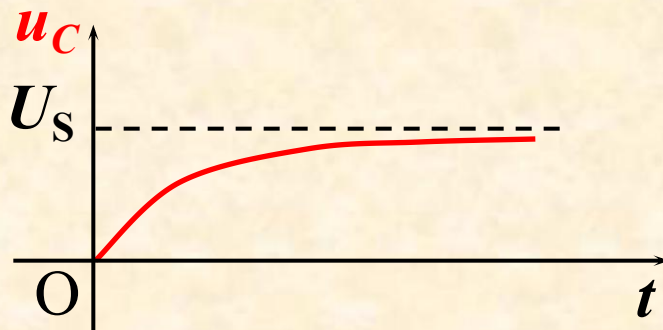
如果已知单位阶跃响应 $s(t)$ ，则任意直流激励 $u_s = U_0 \varepsilon(t)$ 的零状态响应为： $U_0 s(t)$ 。



$$u_c(0_-)=0$$

$$u_c = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t)$$

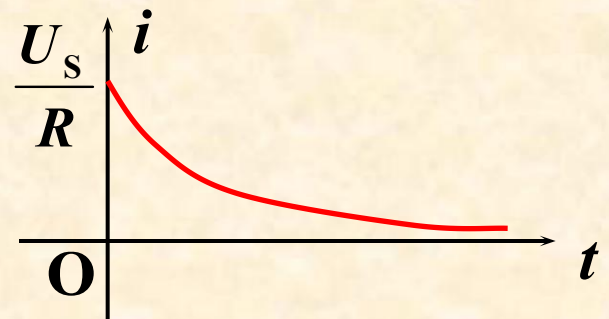
$$i = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$



$$u_c(0_-)=0$$

$$u_c = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t)$$

$$i = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

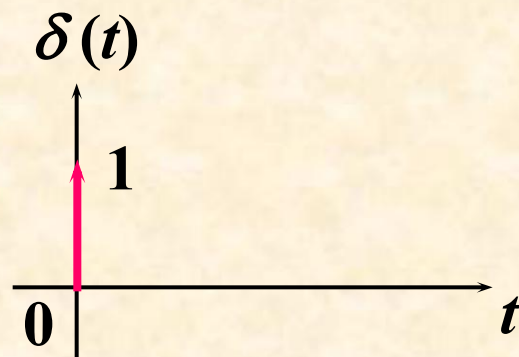


单位冲激函数

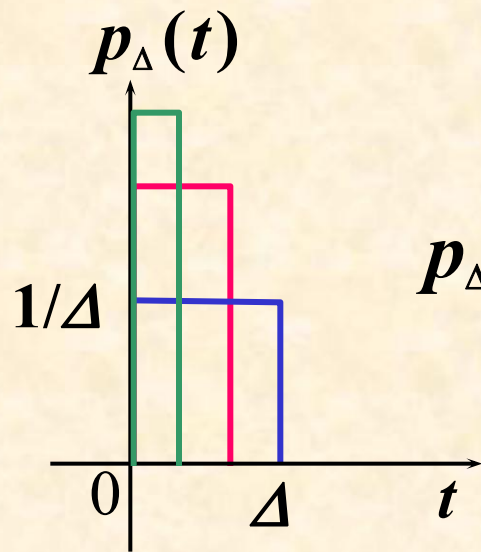
单位冲激函数是一种奇异函数。

1. 单位冲激函数定义：

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t) = \begin{cases} 0 & (t \geq 0_+) \\ 0 & (t \leq 0_-) \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{array} \right.$$

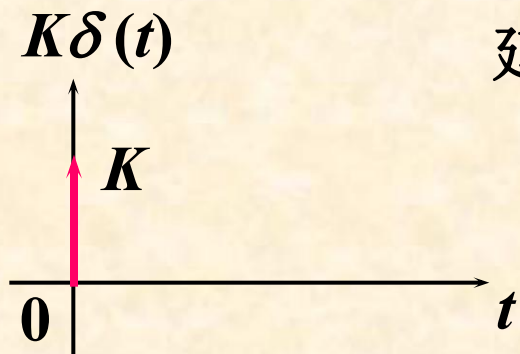
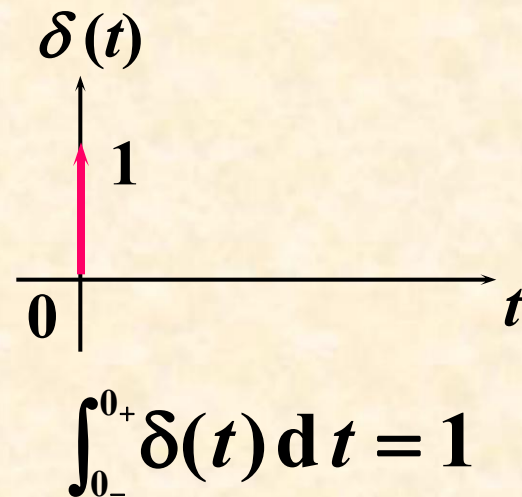


$$\int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = 1$$

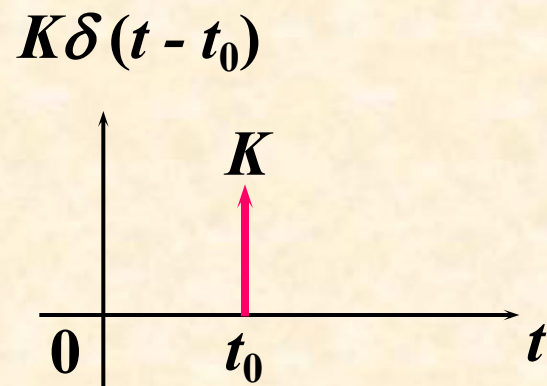
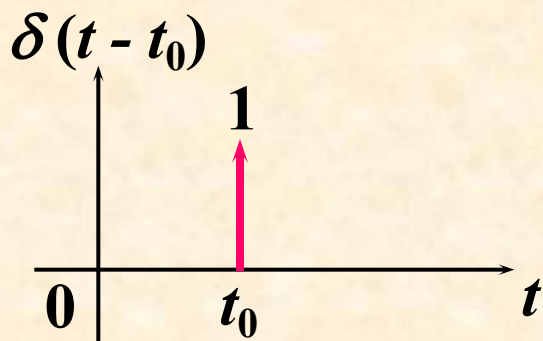


$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0_-) \\ \frac{1}{\Delta} & (0_+ \leq t \leq \Delta_-) \\ 0 & (t \geq \Delta_+) \end{cases}$$

$$\Delta \rightarrow 0 \quad \frac{1}{\Delta} \rightarrow \infty \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} p_{\Delta}(t) = \delta(t)$$

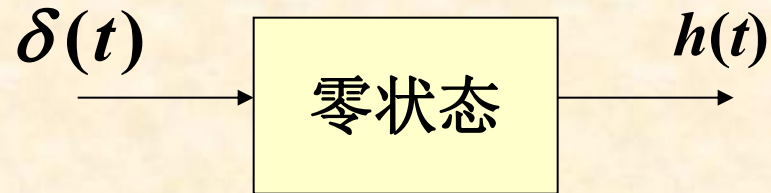


延迟冲激函数 $\delta(t - t_0)$



单位冲激响应:

一阶电路在单位冲激函数 $\delta(t)$ 激励下的零状态响应称为单位冲激响应。



二阶电路概述

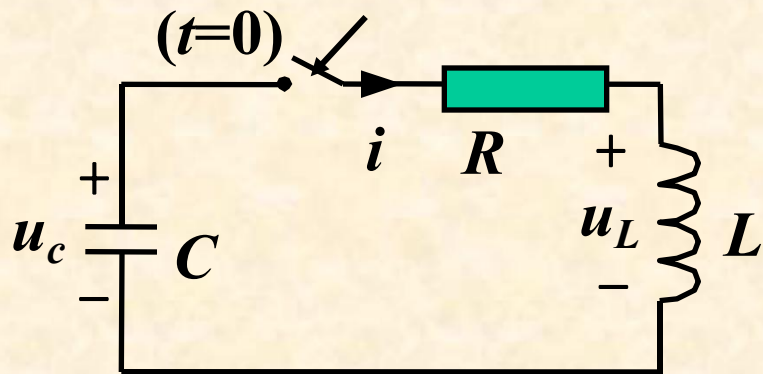
简单了解二阶电路微分方程的建立。

二阶电路的零输入响应，零状态响应和全响应

学习方法

1. 掌握求解二阶电路的方法、步骤。
 2. 得出二阶电路的一般规律。
- * 本节讨论的具体结果只适用于本例，不能套用到其它电路。但得出的规律具有一般性。

二阶电路的零输入响应



已知 $u_C(0_+) = U_0$ $i(0_+) = 0$

求 $u_C(t)$, $i(t)$, $u_L(t)$.

解

$$u_C = Ri + u_L$$

$$i = -C \frac{du_C}{dt}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

初始条件: $u_C(0_+) = U_0$ $i(0_+) = 0 \longrightarrow \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = -\frac{i(0_+)}{C}$

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

设 $u_c = Ae^{pt}$

特征方程为 $LCp^2 + RCp + 1 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

$$= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

根的性质不同，响应的变化规律也不同

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{二个不等负实根} \quad u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{二个共轭复根} \quad u_C = K e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{二个相等负实根} \quad u_C = (A_1 + A_2 t) e^{p t}$$

一. $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ p_1, p_2 不等的负实根

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

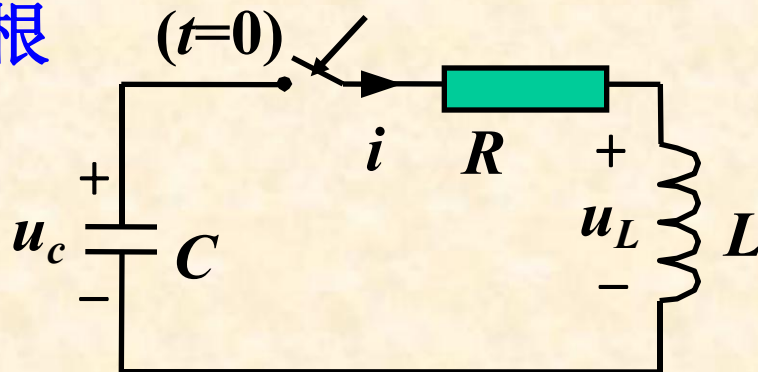
$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$u_C(0_+) = U_0 \rightarrow A_1 + A_2 = U_0$$

$$\frac{du_C}{dt}(0_+) = \frac{-i(0_+)}{C} = 0 \rightarrow p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0$$

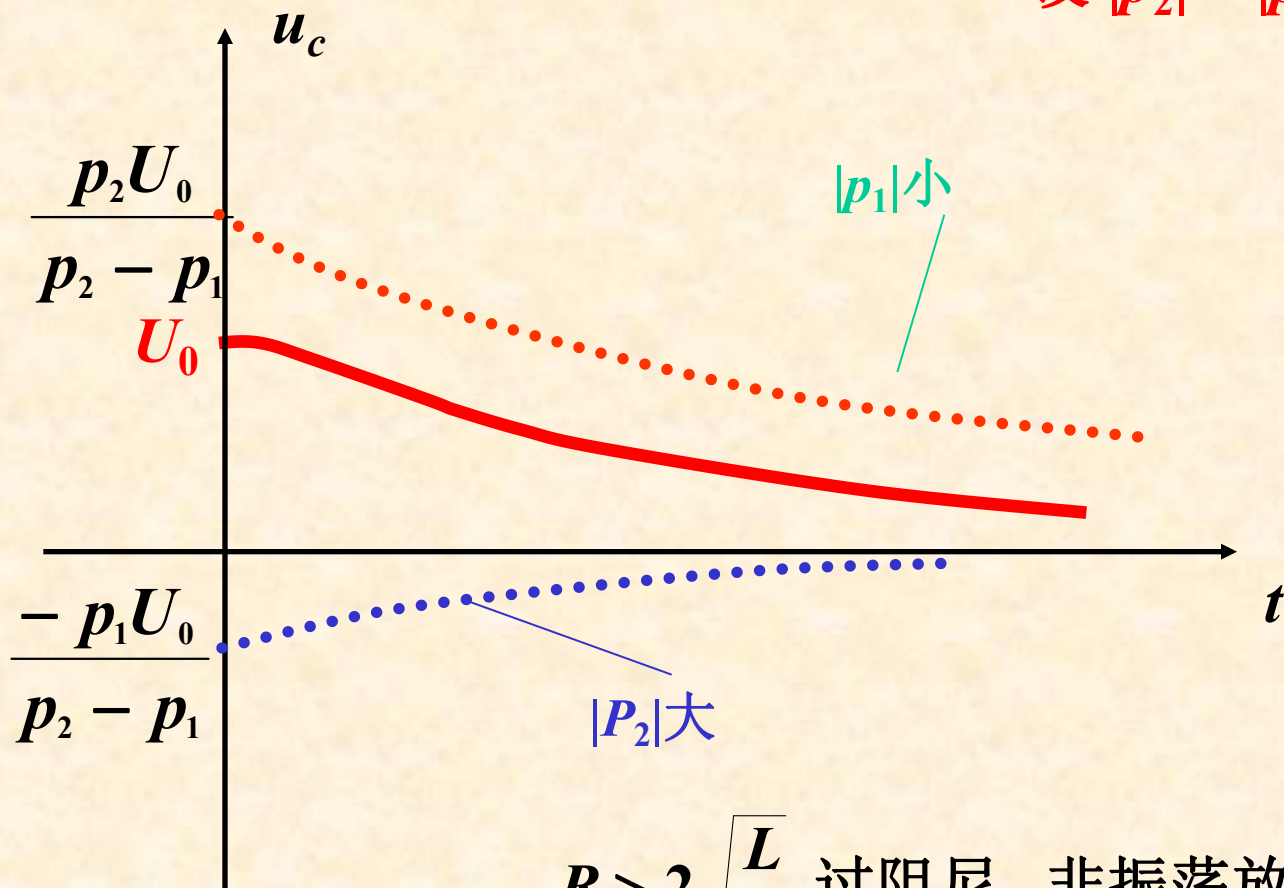
$$A_1 = \frac{p_2}{p_2 - p_1} U_0 \quad A_2 = \frac{-p_1}{p_2 - p_1} U_0$$

$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1} (P_2 e^{p_1 t} - P_1 e^{p_2 t})$$

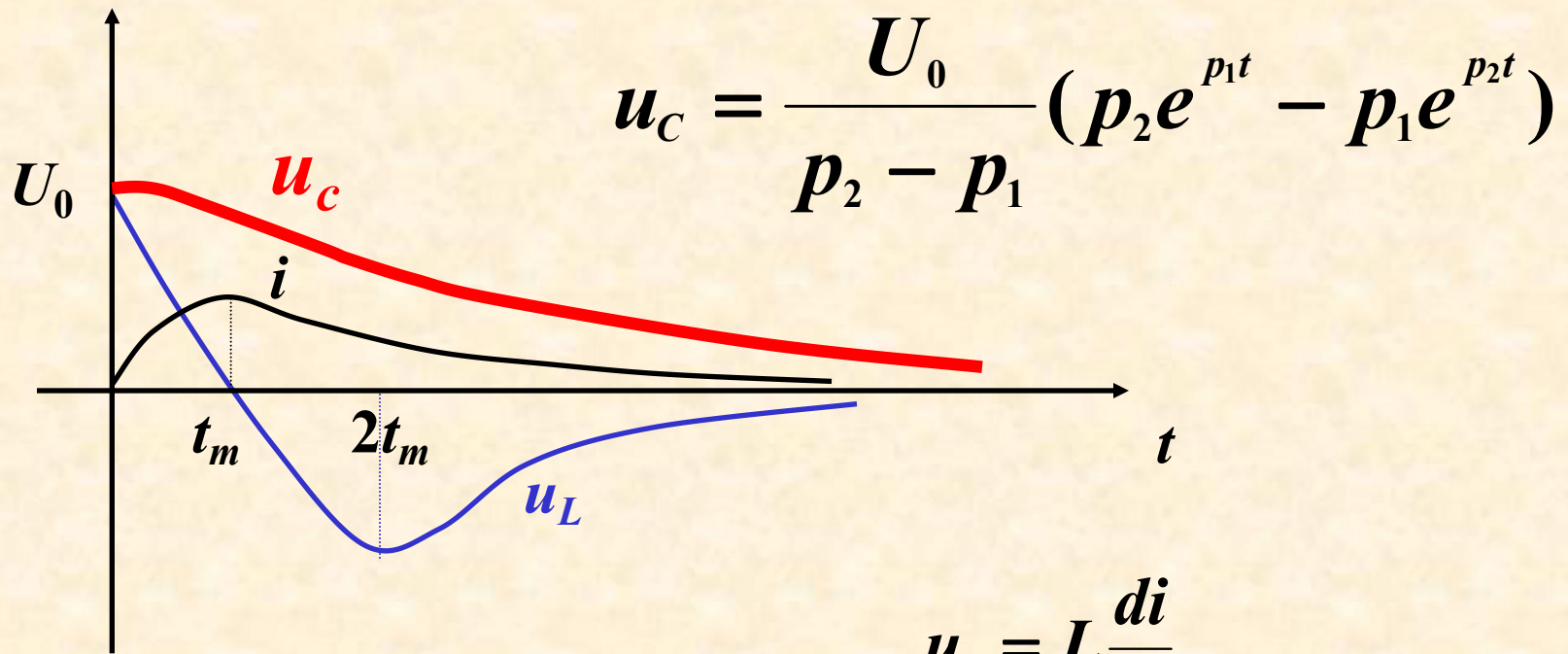


$$u_c = \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

设 $|p_2| > |p_1|$



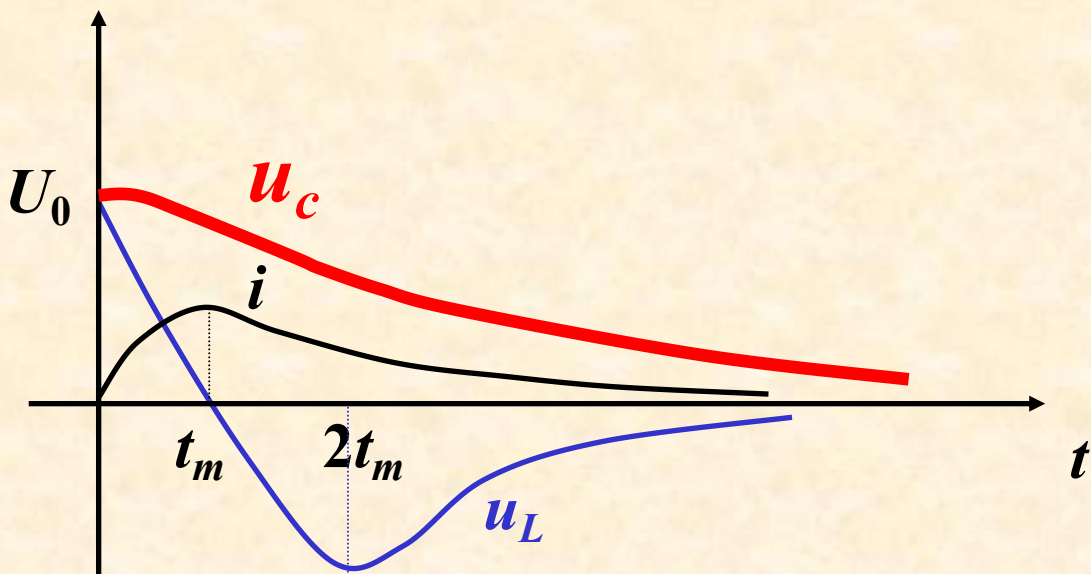
$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 过阻尼, 非振荡放电



$$\begin{aligned}
 i &= -C \frac{du_C}{dt} \\
 &= \frac{-CU_0}{(p_2 - p_1)} (p_1 p_2 e^{p_1 t} - p_1 p_2 e^{p_2 t}) \\
 &= \frac{-U_0}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})
 \end{aligned}$$

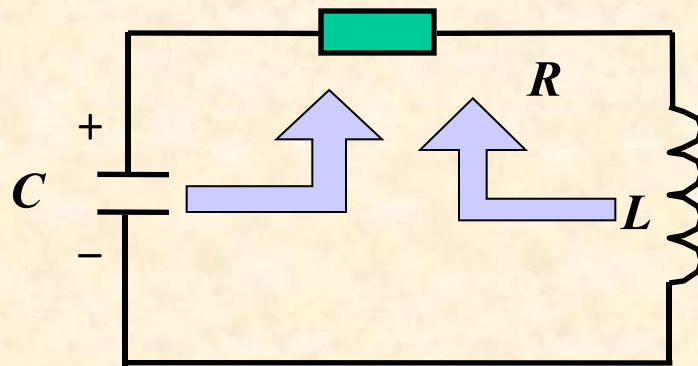
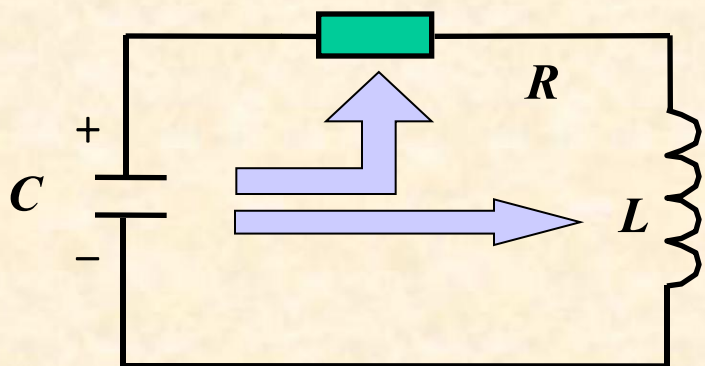
$$\begin{aligned}
 u_L &= L \frac{di}{dt} \\
 &= \frac{-U_0}{(p_2 - p_1)} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})
 \end{aligned}$$

能量转换关系



$0 < t < t_m$ u_c 减小, i 增加。

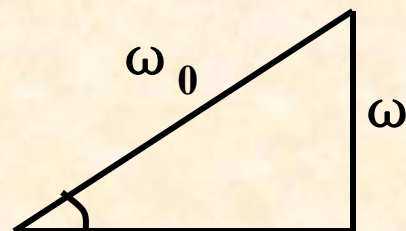
$t > t_m$ u_c 减小, i 减小。



非振荡放电 过阻尼

二. $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 特征根为一对共轭复根

$$p = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$



令 $\delta = \frac{R}{2L}$ δ 衰减因子

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

ω 固有振荡角频率
(阻尼振荡角频率)

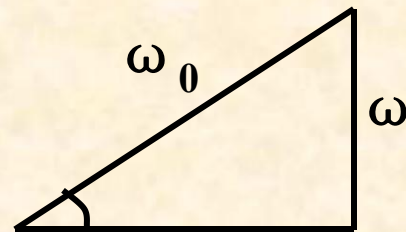
$$\beta = \arctan \frac{\omega}{\delta}$$

ω_0 无阻尼振荡角频率

$$p_1 = -\delta + j\omega \quad p_2 = -\delta - j\omega$$

$$\delta = \omega_0 \cos \beta$$

$$\omega = \omega_0 \sin \beta$$



$$p_1 = -\delta + j\omega = -\omega_0 e^{-j\beta}$$

$$p_2 = -\delta - j\omega = -\omega_0 e^{j\beta}$$

$$e^{j\beta} = \cos \beta + j \sin \beta$$

$$e^{-j\beta} = \cos \beta - j \sin \beta$$

u_C 的解答形式:

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

$$= \frac{U_0}{-j2\omega} (-\omega_0 e^{j\beta} e^{(-\delta+j\omega)t} + \omega_0 e^{-j\beta} e^{(-\delta-j\omega)t})$$

$$u_c = \frac{U_0 \omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \left(\frac{e^{j(\omega t + \beta)} - e^{-j(\omega t + \beta)}}{-j2} \right)$$

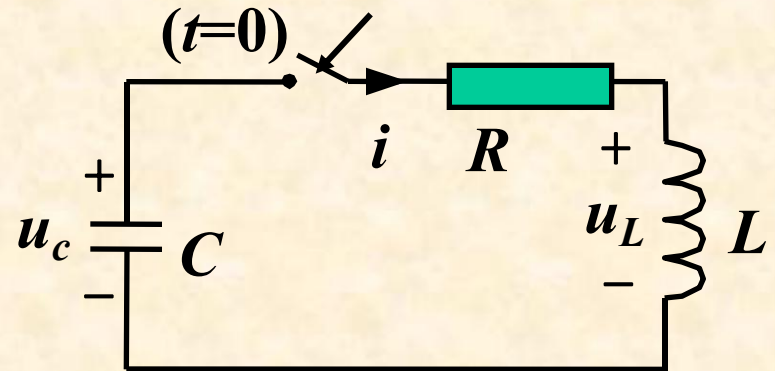
$$= \frac{U_0 \omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$$i = -C \frac{du_c}{dt}$$

$$= \frac{1}{\omega L} U_0 e^{-\delta t} \sin \omega t$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$= -\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \beta)$$



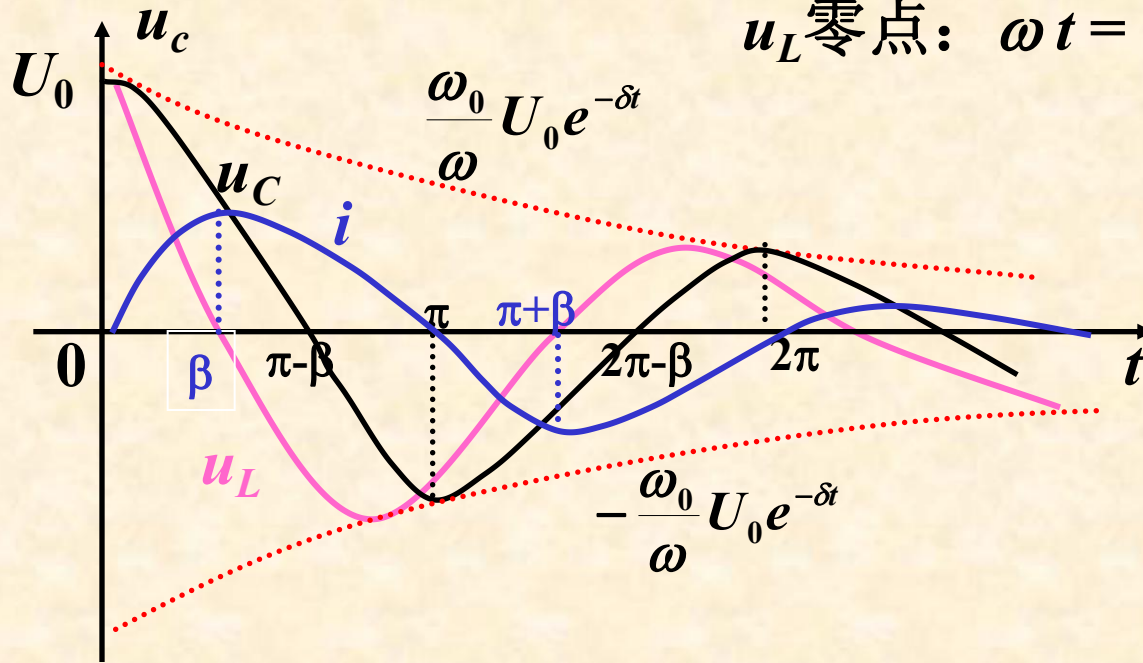
$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) \quad i = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t$$

$$u_L = -\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \beta)$$

u_C 零点: $\omega t = \pi - \beta, 2\pi - \beta \dots n\pi - \beta$, u_C 极值点为 i 零点。

i 零点: $\omega t = 0, \pi, 2\pi \dots n\pi$, i 极值点为 u_L 零点。

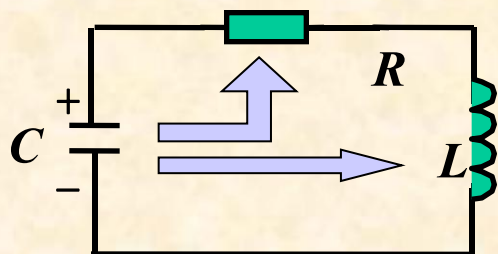
u_L 零点: $\omega t = \beta, \pi + \beta, 2\pi + \beta \dots n\pi + \beta$



能量转换关系

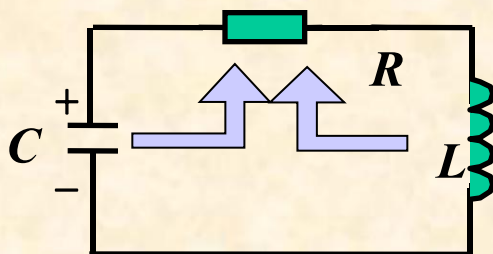
$$0 < \omega t < \beta$$

u_C 减小, i 增大



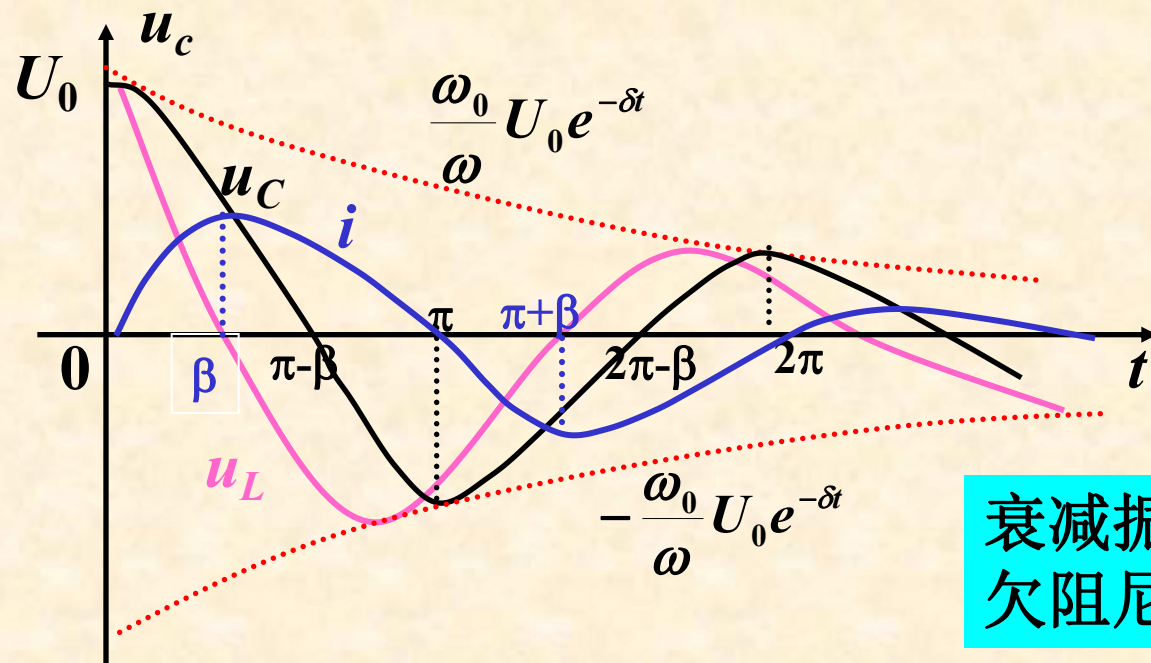
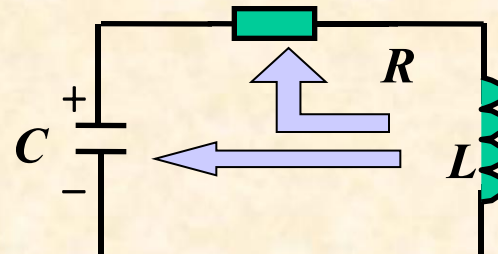
$$\beta < \omega t < \pi - \beta$$

u_C 减小, i 减小



$$\pi - \beta < \omega t < \pi$$

$|u_C|$ 增大, i 减小



衰减振荡
欠阻尼

特例 $R = 0 \Rightarrow \delta = 0$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$p_{1,2} = \pm j\omega_0$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$u_C = U_0 \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = u_L$$

$$i = \frac{U_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t$$

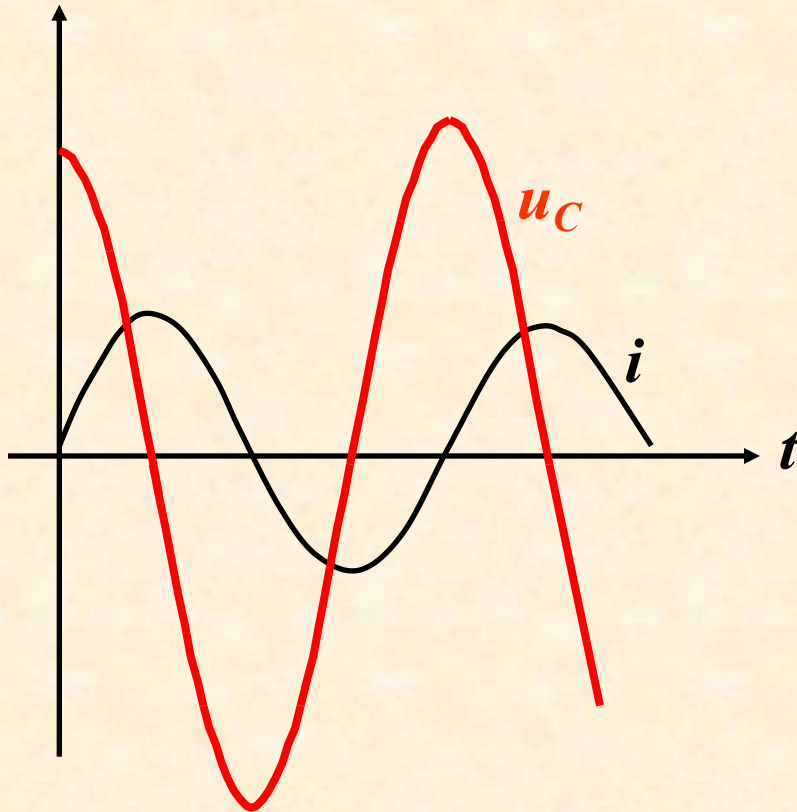
$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$$i = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t$$

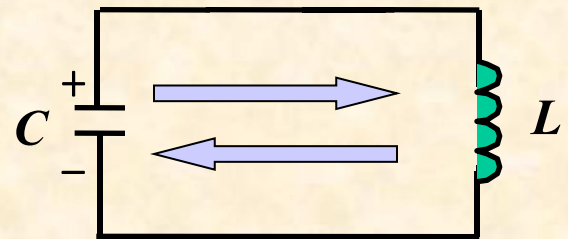
$$u_L = -\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \beta)$$

$$u_C = U_0 \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = u_L$$

$$i = \frac{U_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t$$



等幅振荡
无阻尼



三. $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ p_1, p_2 相等的实根

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad p = p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L} = -\delta$$

$$u_c = e^{-\delta t} (A_1 + A_2 t)$$

由初始条件 $u_c(0_+) = U_0 \rightarrow A_1 = U_0$

$$\frac{du_c}{dt}(0_+) = 0 \rightarrow A_1(-\delta) + A_2 = 0$$

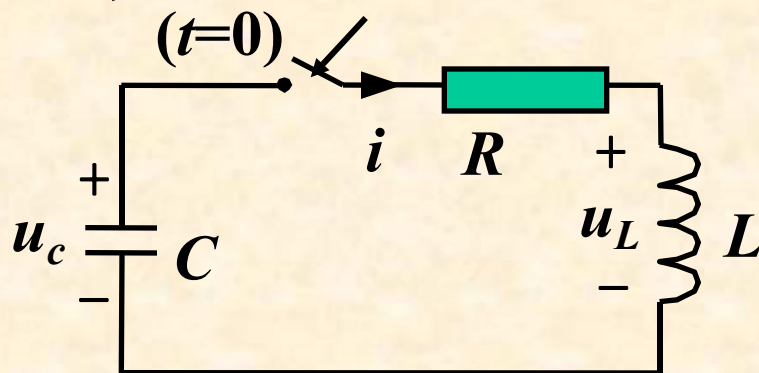
解出
$$\begin{cases} A_1 = U_0 \\ A_2 = U_0 \delta \end{cases}$$

$$u_C = U_0(1 + \delta t)e^{-\delta t}$$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U_0 e^{-\delta t} (1 - \delta t)$$

非振荡放电
临界阻尼



小结:

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ 过阻尼, 非振荡放电} \quad u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ 临界阻尼, 非振荡放电} \quad u_c = e^{-\delta t} (A_1 + A_2 t)$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ 欠阻尼, 振荡放电} \quad u_c = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$$\text{由} \begin{cases} u_c(0_+) \\ \frac{du_c}{dt}(0_+) \end{cases} \quad \text{定积分常数}$$

可推广应用于一阶二阶电路

线性电路古典法解二阶过渡过程包括以下几步：

(1)换路后(0_+)电路列写微分方程

(2)求特征根，由根的性质写出自由分量（积分常数待定）

(3)求强制分量（稳态分量）

(4)全解=自由分量+强制分量

(5)将初值 $f(0_+)$ 和 $f'(0_+)$ 代入全解，定积分常数求响应

(6)讨论物理过程，画出波形

重点:
$$f(t) = f'(t) + (f(0_+) - f'(0_+))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1、 τ 时间常数

RC电路 $\tau = RC$ RL电路 $\tau = \frac{L}{R}$
R为C或L两端的等效电阻。

2、 $f(0_+)$ 初始值

$u_C(0_+) = u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$;

画 0_+ 等效电路, 求所需的 $u(0_+)$ 、 $i(0_+)$ 等。

3、 $f'(t)$ 稳态解

电路达到稳态时的解。

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{直流激励})$$

零输入响应: $f(t) = f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$

零状态响应: $f(t) = f(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

全响应: $f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

正弦激励: $f(t)$: 电路稳态解。(采用相量分析法)

$$f(t) = f'(t) + [f(0_+) - f'(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$f(0_+)$: $f(t)$ 在 $t=0$ 时的值。